ПРИТЧЕВЫЕ МИНИАТЮРЫ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Валерий Николаевич Клепиков,
старший научный сотрудник лаборатории воспитания нравственно-этической культуры ГосНИИ семьи и воспитания, заместитель директора по инновационной работе обнинского Лицей, кандидат педагогических наук (Klepikovvn@mail.ru)

В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ ОЧЕНЬ ВАЖНО РАССМАТРИВАТЬ НАУЧНЫЕ ПОНЯТИЯ В КОНТЕКСТЕ ВНУТРЕННЕГО МИРА УЧАЩЕГОСЯ. ДЛЯ ЭТОГО ТРЕБУЕТСЯ АКТИВИЗАЦИЯ ЕГО ВООБРАЖЕНИЯ, ЛИЧНОСТНЫХ АССОЦИАЦИЙ И ОБРАЗОВ. ОБОГАЩАЯСЬ НОВЫМИ СМЫСЛАМИ, ПОНЯТИЯ СТАНОВЯТСЯ ЦЕННОСТНО-ЗНАЧИМЫМИ И СПОСОБСТВУЮТ СТАНОВЛЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ РЕБЁНКА. ЗАМЕЧАТЕЛЬНО, КОГДА ДЕТСКИЕ НАХОДКИ ОПРЕДМЕЧИВАЮТСЯ В МИНИ-ТЕКСТЫ, КОТОРЫЕ МЫ НАЗЫВАЕМ ПРИТЧЕВЫМИ МИНИАТЮРАМИ.

Выражая своё мнение об уроках математики, ученики нередко высказываются против их чрезмерной рационализации, схематизации и монологизации. Это, в первую очередь, связано с тем, что очень часто уроки проходят при доминировании педагога, когда он воплощает собой «абсолютное знание», а ученики предстают в роли «вечных незнаек». Понятно, что не все дети могут выразить свои мысли ясным языком, тем более, когда понимание только устанавливается. Поэтому точность и строгость со стороны педагога часто придают уроку авторитарные черты. Именно такое состояние французский мыслитель Мишель Фуко назвал «власть-знание»: тот, кто обладает актуальной информацией, всегда находится «над» тем, кто ею не обладает.

Иногда со стороны учащихся можно услышать и «провокационные» вопросы типа: «Зачем нам нужно знать так много второстепенной математической информации, которая в жизни, скорее всего, не пригодится?» и т. д. Особенно это волнует тех детей, которые не предрасположены к точным наукам. И здесь не обойтись тривиальными ответами типа: «Для подготовки к экзамену», «Для общего развития», «Для развития интеллекта» и т. п. Это учащиеся слышат и на других общеобразовательных уроках. Более того, и сам учитель в глубине души не очень-то верит подобным объяснениям.

Чувство неудовлетворённости таким положением дел в области преподавания математики сложилось в нашем лицее уже около двадцати лет назад. И мы попытались хотя бы частично его исправить: искали ответы на свои вопросы в педагогике, психологии, философии и других науках. В результате был сформулирован центральный вопрос-проблема: «Как математика может способствовать свободному становлению мировоззрения учащегося вне зависимости от того, предрасположен он к точным наукам или нет?»

Задавшись таким вопросом, мы стали внимательно просматривать литературу, где хотя бы мимолётно упоминались мировоззренческие аспекты, связанные с математикой. И заметили, что многие мыслители, даже гуманитарии, использовали и используют математические образы в целях выражения своего миропонимания. Например, Л. Н. Толстой придумал следующий образ с использованием свойства дроби. Человек есть дробь: числитель — это совокупность достоинств, которые он имеет, а знаменатель — это то, на сколько он свои достоинства оценивает, при этом гармония — это тот случай, когда дробь стремится к единице.

Важно отметить, что и ученики, если дать им возможность свободно высказаться, часто в своих вопросах и ответах создают яркие и незабываемые образы. Вот некоторые из них:

1. «Между любыми двумя числами залегает целая пропасть чисел» (6-й класс).

2. «Доля всегда помнит о целом и части, в отличие от целого и части» (5-й класс).

3. «Трёхмерные фигуры дают тень» (5-й класс).

4. «Прямоугольник нельзя подержать в руке, так как он существует только на плоскости» (6 класс).

5. «Любая точка прямой является её центром» (8-й класс).

6. «Бесконечную прямую охватить нельзя, поэтому наименовать и определить её невозможно» (8-й класс).

7. «Окружность — это геометрическая фигура, у которой ни одна точка не выпячивается, потому что она ровная» (7-й класс).

8. «Число есть единство конечного и бесконечного» (7-й класс).

9. «Так как точка является безразмерной и бесформенной геометрической фигурой, то из неё могут возникнуть все другие геометрические фигуры» (9-й класс).

10. «Через две точки можно провести сколько угодно прямых, так как они безразмерные» (7-й класс).

11. «Прямая состоит из бóльшего количества точек, чем отрезок, так как она длиннее» (5-й класс).

12. «Производная — деликатная величина, так как всегда знает свой предел» (10-й класс).

13. «Существуют тёплые и холодные числа» [т. е. положительные и отрицательные] (6-й класс).

14. «Окружность — это линия, загибающаяся в каждой точке» (6-й класс).

15. «Объёмные фигуры живут в пространстве? Нет, они выталкивают пространство» (5-й класс).

16. «Бесконечная скорость тождественна покою» (11-й класс).

Все перечисленные высказывания содержат странность, интригу, противоречие, парадокс и характеризуют ищущую, пытливую мысль учащегося. И это не удивительно: осмыслить даже очевидную информацию можно только через её сознательную или бессознательную *проблематизацию*.

Но можно ли с помощью подобных изречений как-то выйти на мировоззрение учащегося? На наш взгляд, можно, если от этих высказываний не отмахиваться, а постараться представить их как более развёрнутые мини-тексты, точнее — *притчевые миниатюры*, которые учитель создаёт вместе с ребятами[1]. Как показывает наш педагогический опыт, при глубоком и заинтересованном продумывании изучаемого материала он постепенно «завязывается» в притчевую миниатюру.

Конечно, в художественных текстах часто сразу видна их мировоззренческая глубина. Над математическими текстами требуется поработать: обогатить их дополнительной исторической информацией, найти проблемность и парадоксальность в уже известном содержании, выявить яркие образы и т. д. В результате они могут заговорить и раскрыть для учащегося целое поле жизнеопределяющих смыслов. Что больше всего на уроке отталкивает ученика? Конечно, однозначность, сентенции, поучения, какими бы мудрыми они ни были[2]. Дать возможность ученику в притчевой миниатюре найти и выявить *свой смысл* — вот одна из главных целей, которая ставится в процессе создания притчевых миниатюр.

---

[1] Это можно делать на классных часах, заседаниях НОУ, во время индивидуальных бесед и т.д.

[2] Как пишет В.А. Еровенко-Риттер: «Излишне детализированные концепции могут способствовать сужению или потере смысла… Иногда мысль лучше проясняется, если мы проиллюстрируем её на косвенном примере... Только практикующий математик, исходя из своего личного опыта, способен объяснить глубинный смысл близких ему математических понятий (Еровенко-Риттер В.А. Философско-образовательное значение математики // Педагогика. № 5. 2004. С. 36).

Если мифы и легенды сыграли основополагающую роль в возникновении и развитии фольклора, литературы и искусства, то притчи («премудрость») — в формировании мировоззренческих основ наций и народов. Притча при всех различиях в трактовке жанра обязательно должна обладать двумя чертами, по которым её можно отличить от любых других произведений,— *поучительностью* и *аллегоричностью*. Притягательная сила текстов, в которых проявлена притчевость, заключается в том, что это не просто развлекательные рассказы, побасенки и анекдоты, а *мировоззренческие прозрения и открытия*. Все эти качества притчи необходимы именно в школьном возрасте, когда происходит пробуждение человека к *душевной* и *духовной* жизни.

На наш взгляд, школьников необходимо с младших классов учить опредмечивать свои мысли, т. е. сворачивать идеи, творческие озарения, прозрения в *мини-текст* (притчевую миниатюру, эссе, этюд, афоризм), с помощью которого происходит рефлексия, сохраняется личностное приращение и инициируются дальнейшие духовно-нравственные поиски и открытия[3]. Для этого необходимо знать элементарную *технологию создания мини-текстов*. Она включает несколько основных этапов.

Предваряет написание мини-текста некоторое духовно-нравственное потрясение, удивление, озарение, поступок, после которого хочется его описать, обдумать и как-то сохранить. Без такого потрясения мини-тексты получаются искусственными и надуманными.

На первом этапе «эскизно» набрасывается общая идея мини-текста, в которой схватывается её суть, намечается примерное название. Это может быть одно предложение, а может быть небольшое сочинение, которое пишется в свободной форме.

На втором этапе создаётся мини-текст ($^1/_4$ – $^1/_2$ страницы), в котором раскрывается общая идея с помощью уже хорошо продуманных и подобранных слов. Во время создания мини-текста важно привлекать яркие образы, символы и метафоры, которые бы воссоздали то, что было прочувствовано, пережито.

На третьем этапе создание мини-текста завершается уточнением названия и окончательной его корректировкой, в соответствии с названием.

Мини-текст отвечает следующим требованиям:

1) мини-текст не должен быть однозначным, прямолинейным, информационным, как текст sms-сообщения; он должен содержать яркий запоминающийся образ, самобытную метафору, изобретательскую мысль, оригинальную идею, неожиданное прозрение, попытку разрешить парадокс или противоречие;

2) мини-текст не должен быть крайне субъективным, т. е. он должен быть рассчитан на восприятие и понимание его другими людьми; представим себе, что это маленькое произведение искусства, которое создано для других людей;

3) в мини-тексте должна просматриваться логика изложения мысли, последовательность раскрытия образа или разрешение (хотя бы частичное) парадокса или противоречия (например: тезис — антитезис — синтез);

4) при смысловой завершённости мини-текста он должен наталкивать на дальнейшее развитие воображения и мысли; быть в какой-то степени «поучительным»;

5) мини-текст не должен быть большим по объёму, так как «порция» первоначального заинтересованного внимания человека ограничена (оптимальный объём — $^1/_4$ – $^1/_2$ страницы или пять-десять предложений), поэтому мини-текст должен стремиться к афористическому изложению; предложения должны быть краткими, но ёмкими по смыслу и «упругими» по разворачиванию новых идей;

6) мини-текст должен вызывать желание поспорить, войти в диалог, высказать своё мнение по данному вопросу; при этом, мини-текст может быть написан в утвердительной форме, это

[3] Этим можно заниматься на индивидуальных занятиях, факультативах, в творческом лагере, используя для активизации мысли и воображения высокохудожественные фотографии, рисунки, репродукции картин, которые можно с избытком найти в Интернете.

тот случай, когда мысль человека пришла к своему окончательному созреванию;

7) мини-текст должен иметь название; его желательно давать лишь на этапе окончания написания мини-текста; название постепенно вызревает в процессе его создания;

8) мини-тексты должны стремиться охватить весь круг проблем той или иной науки или дисциплины; стремиться создать общее представление о ней;

9) мини-текст должен стремиться к интеграции различных ассоциаций, образов и знаний, создавая нечто единое, целое, органичное внутреннему миру человека (который «не знает» различных предметных перегородок);

10) мини-тексты должны быть «строительным материалом» по созданию личностного мировоззрения человека, поэтому отражать самые существенные движения души, её эволюцию.

В математике можно придумать притчевые миниатюры, связанные с такими понятиями, как «целое», «число», «дробь», «прямая пропорциональность», «обратная пропорциональность», «пропорция», «золотая пропорция», «геометрическая прогрессия», «окружность», «дифференциация», «интеграция» и т.д. Все перечисленные понятия несут в себе тысячелетнюю мудрость развития человечества, поэтому они значимы и для индивидуального становления человека. При этом общие по смыслу понятия можно выявить и в других науках, поэтому здесь открываются широчайшие возможности для интеграционных процессов между математикой и литературой, математикой и историей, математикой и философией.

На наш взгляд, основные математические идеи, имеющие принципиальное значение для развития личности школьника, можно преподносить как своего рода притчи. На уроке очень важно сформулировать его суть в нескольких весомых и образных выражениях, чему как раз и способствуют притчевые миниатюры. В идеале мы представляем всю школьную математику в виде блока взаимосвязанных притчевых миниатюр, т.е. в виде единой Притчи. Их достоинство также в том, что это малые по объёму произведения, которые выступают в роли интригующих и обобщающих текстов и не занимают при их изложении много времени. Учитель, по своему усмотрению, в нужном месте может вставлять их по ходу урока, позволяя учащимся отдохнуть, активизируя интерес, образное мышление и нестандартное ви́дение.

Предлагаем вашему вниманию некоторые притчевые миниатюры, которые родились в «Лицее» города Обнинска в течение последних лет.

Мудрость

Однажды юный человек провёл отрезок и попросил мудреца, чтобы тот сократил его, не урезывая и не касаясь. Мудрец параллельно провёл более длинный отрезок, и тем самым первоначальный отрезок был умалён. «Так можно относиться к своим недостаткам и достоинствам,— заметил мудрец,— увеличивая достоинства, мы тем самым умаляем недостатки». В свою очередь, мудрец задал юноше следующую задачу: на листе бумаги находятся две различные точки. Как их совместить, если исключить возможность соединения точек линией? Юноша, подумав, сложил листок и совместил точки. «Так часто бывает в жизни,— подметил юноша,— когда проблема не решается в «плоском измерении», то легко решается в «многомерном».

Пропорция отношений

Древнегреческий математик Фалес говорил: «Помните, что дети ваши будут обходиться с вами так же, как вы обходитесь со своими родителями». В данном высказывании Фалес использует те знания о пропорции, в которых утверждается, что пропорция — это равенство двух отношений: $a/b = c/d$. Учитывая знания о пропорции, мысль Фалеса можно сформулировать и так: моё отношение к родителям будет равным отношению моих детей ко мне. Также в высказывании Фалеса присутствует золотое правило нравственности: относись к другим так, как ты хотел бы, чтобы они относились к тебе.

Сократ и эпикуреец

Однажды к Сократу подошёл эпикуреец и заметил, что если он предложит его ученикам множество различных удовольствий, то они от него уйдут. Сократ неожиданно согласился: может быть так и произойдёт, ведь с горы скатиться гораздо легче, чем на неё подняться. В контексте данной истории интересен следующий математический факт: если искомое число уменьшить на 50%, то затем полученное число до первоначального необходимо увеличить уже на 100%. Проценты здесь выступают в роли «долей». А доли — это самые пластичные и живые числа, которые помнят о целом и части, чутко реагируя на различные изменения величин. Данная математическая операция показывает, что в жизни очень легко нечто утратить, но гораздо сложнее восстановить.

Целое

В Древней Греции жили остроумные и хитрые мыслители — софисты. Один из них рассуждал следующим образом: «Лекарство, принимаемое больным, есть добро. Чем больше добра, тем лучше. Значит, лекарств нужно принимать как можно больше». Одна из ошибок в этом рассуждении возникает из-за пренебрежения следующим фактом: добра не может быть больше или меньше, добро всегда есть полнота, то есть оно есть целиком или его нет. Когда мы пренебрегаем целостным пониманием явления, то сразу же получаем смешные выводы. Подобные ошибки легко найти и в математике. Например, иногда по той же причине получаются следующие результаты: 2,4 машины; 1,5 человека; 3/4 ручки и т. д. Поэтому в математике, как и во всех других науках, играет большую роль понятие «целое». «Целое» может быть любым числом. Однако самым важным является тот факт, что все измерения в точных науках производятся относительно универсального эталона: 1 м, 1 час, 1 кв. м., а эталон и есть «целое». В этой связи можно проникнуть и в глубокий смысл фразы Пифагора: «Всё есть число», если под числом понимать универсальную единицу или целое.

Единица как целое

Символом целого является *единица*. Но не та единица, которую мы используем при счёте. Великий древнегреческий философ Платон считал, что без единицы невозможны никакие «мерные отношения, никакая пропорция». Математик Евклид в «Началах» так понимал единицу: «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым». Великий математик эпохи Возрождения Николай Кузанский писал: «Число не есть единица, хотя всякое число свёрнуто в единице» А Ньютон утверждал: «…под числом мы понимаем не столько собрание единиц, сколько отвлечённое отношение одной величины к другой, условно принятой нами за единицу». Другими словами, единица для них не просто число, а нечто божественное, к чему всё приобщается. Поэтому следует различать качественную характеристику единицы и количественную: единица одновременно является цифрой, числом и «целым». Наведением на качественное свойство единицы может служить действие возведения любого числа в нулевую степень или возведение единицы в любую степень: в данном случае мы всегда получаем в результате единицу; а также нахождение для единицы обратного числа: обратным числом является та же единица. Приобщение к целому, или единице, иногда помогает при счёте. Например. Как сравнить дроби $^2/_3$ и $^3/_4$ с помощью *целого*? Дополняем эти дроби до единицы, получаем $^1/_3$ и $^1/_4$, сравниваем их, $^1/_3 > {}^1/_4$, то есть до единицы 2/3 не хватает больше, чем 3/4, поэтому $^2/_3 < {}^3/_4$.

Земная точка и точки небесные

Ещё софисты Древней Греции убеждали, что окружность и касательная имеют не одну общую точку, и, казалось бы, реальный опыт это подтверждает. Однако спустя тысячелетия духовный опыт человечества показал, что не только формальная геометрия права, но и «геометрия сакральная». По словам оптинского старца Амвросия: «Мы должны жить на земле так, как колесо вертится: только чуть одной точкой касаться земли, а остальным непрестанно вверх стремиться; а мы как заляжем на землю и встать не можем».

Здравый смысл

Иногда некоторые люди кичатся своим трезвым рассудком, или так называемым здравым смыслом, и подсмеиваются над натурами более утончёнными и романтичными. Однако всегда ли здравый смысл прав? Делая упор лишь на то, что «очевидно» или «естественно», здравый смысл не всегда восходит до понимания того, что может быть на самом деле. Действительно, попробуем это показать с помощью математики. Как вы думаете, к чему будет стремиться сумма чисел $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8 + ^1/_{16} + \ldots = ?$ Те, кто знаком с суммированием членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, отметят, что приведённое выражение потенциально стремится к 1. А к чему будет стремиться сумма чисел $^1/_2 + ^1/_3 + ^1/_4 + ^1/_5 + \ldots = ?$ Здравый смысл подсказывает, что данная сумма тоже не превысит какого-либо заданного числа, но он ошибается! На самом же деле написанное выражение бесконечно велико, и если взять в нём достаточно большое количество членов, то сумма их превысит любое число. Таким образом, не спешите давать скорую оценку мнениям других людей — может быть, они всё-таки правы.

Чудо творчества

Парадоксальная неопределённость точки заключается в её принципиальной противоречивости: она есть единство крайних противоположностей — *бесконечно малого* и *бесконечно большого* или, если кратко, нуля и бесконечности, то есть точка есть *ничто* и *всё* одновременно. Точка есть *ничто*, однако именно из неё или на её основе конструируются все геометрические фигуры. Более того, согласно последней космической гипотезе наша вселенная появилась в результате взрыва сверхплотного вещества малого объёма, сравнимого с «точкой». Также интересно, что библейский Бог творит мир из «ничто». Так и у человека, который занимается творчеством, творения возникают как бы из «ничего». В этом и состоит чудо творчества.

Линия

В математике есть удивительная геометрическая фигура — *линия*. В школьных учебниках она упоминается редко, так как ей невозможно дать строгого определения. В «Началах» Евклида линия определяется как «длина без толщины». У Аристотеля был целый трактат о так называемых «неделимых линиях»; с такой позиции вовсе не точка была минимальным неделимым элементом. После введения Декартом системы координат появилась возможность дать представление о линии как о траектории движущейся точки. Таким образом, линия по своей фундаментальности может сравниться только с точкой. Она при определённых условиях может стать прямой, окружностью, эллипсом, параболой, синусоидой и т. д. Многие мыслители размышляли над загадочностью линии. Леонардо да Винчи истолковывал её как волнистую линию, придающую форму предмету. Анри Бергсона волновал «индивидуальный изгиб» линии, её неповторимое очертание. В живописи особую роль во введении «новой линии» сыграл Анри Матисс, который передавал уникальной линией «прозаические приметы определённого сущего», и тем самым придавал им неповторимое очарование. Если каждый из миллиардов живущих на земле людей проведёт свою линию, то она будет неповторимой, как и он сам. Исходя из вышесказанного, становится понятно, что в индивидуальной жизни каждой личности линия является образом уникальной человеческой самобытности.

«Когда часть есть целое». Однажды русский философ Николай Бердяев заявил: «Личность есть микрокосм, целый универсум. Только личность и может вмещать универсальное содержание, быть потенциальной вселенной в индивидуальной форме. Личность не есть часть и не может быть частью в отношении к какому-нибудь целому, хотя бы и огромному целому, всему миру». По сути, мыслитель заявил, что *часть равна целому*. Но возможно ли это? Как мы знаем, в геометрии предполагается, что любая геометрическая фигура состоит из точек. Однако где содержится точек больше: в стороне (отрезке) квадрата или в самом квадрате? Оказывается, что в стороне содержится столько же точек, сколько и в квадрате, и даже в кубе. Более того, в стороне содержится столько точек, сколько и во всём бесконечном пространстве. Это связано с тем,

что бесконечность не может быть меньше бесконечности. Поэтому философ прав: вселенная есть бесконечность и личность тоже есть бесконечность. Вопрос лишь в том, сможем ли мы открыть в себе эту бесконечность?

Бесконечный миг[4]

Рассказывают, что один скупердяй обратился как-то к Богу:

— Господи, ты велик и всемогущ! — молвил скупердяй. — Что для тебя тысяча лет?
— Один миг, — ответил Бог.
— А тысяча золотых?
— Один грош.
— Так подари мне его.
— Хорошо, подожди один миг.

Миновал миг. Глядит Бог по сторонам да затылок чешет. Нет скупердяя, один тлен остался. Мораль? С бесконечностью следует обходиться очень и очень деликатно.

Уважение к Учителю

Уважительное расстояние, отделяющее ученика от Учителя, является в определённом смысле абсолютным и представляет собой яркое воплощение известной математической апории Зенона. По его мнению: «Существо более медленное в беге никогда не будет настигнуто самым быстрым, ибо преследующему необходимо раньше прийти в место, откуда уже двинулось убегающее, так что более медленное всегда имеет некоторое преимущество». Таким образом, если человек стал настоящим учеником, то между ним и Учителем всегда будет существовать известная дистанция, которую он никогда не позволит себе перешагнуть, даже если Учитель устал и остановился.

Итак, на наш взгляд, математика должна разрабатывать не абстрактные для школьника проблемы, а те, которые языком математики говорят что-то о его внутреннем мире, формируют его мировоззрение. Этому в определённой мере способствуют притчевые миниатюры, которые учитель создаёт вместе с детьми. Хочется верить, что даже если в процессе дальнейшей жизни многие математические формулы и определения в памяти бывшего ученика сотрутся, то останутся яркие и незабываемые образы, порождённые притчевыми миниатюрами. ❑

[4] Данную притчу один из учеников нашёл в местной газете. Мы всегда рады, если находим готовые притчи. Значит, не только мы мыслим в данном направлении.