Эвристика Евклида

В.Г. Шеховцов

Как известно, самое надёжное знание то, что выстроено самостоятельно. Насколько трудно достичь такой обретённости знания в обучении также хорошо известно, особенно если речь идёт об обучении современному научному знанию — чем совершеннее его *формы*, тем глубже в них скрыты априорные мысленные модели, которыми было вызвано их построение. *«Нет ничего более важного, чем умение найти источник открытия — это, по-моему, ещё интереснее, чем сделать само открытие»* — говорил Г.В. Лейбниц. Отец технологичных форм научного знания, изобретший способ обучения пользоваться анализом (и преподавать его) людей вовсе его не понимающих, намеревался написать сочинение «Искусство изобретения», но не успел, остались лишь отдельные фрагменты.

Эта информация из рецензии на знаменитую книгу G. Polya «How to solve it»[1] звучит вполне правдоподобно. В рецензии также говорится, что задолго до Лейбница изучением «способов делать открытия и изобретения», т. е. *эвристикой*, занимался автор «Начал» Евклид. А это уже удивительно! Главный и самый знаменитый труд Евклида известен совсем иным.

Образовательную сторону этого труда находили неудовлетворительной многие учёные. Шопенгауэр писал: «*Ходульное, надуманное доказательство Евклида заставляет спросить, «а почему так?», тогда как один взгляд на хорошо известный простой чертёж гораздо лучше, чем всякое доказательство, позволяет вникнуть в суть дела, убедиться в необходимости доказываемого свойства и в связи его с наличием у треугольника прямого угла.*

И для случая неравных катетов, как и вообще для всякой геометрической истины, должно существовать подобное наглядное доказательство — хотя бы потому, что открытие истины всегда имело в своей основе созерцаемую необходимость, а доказательство придумывалось только потом»[2].

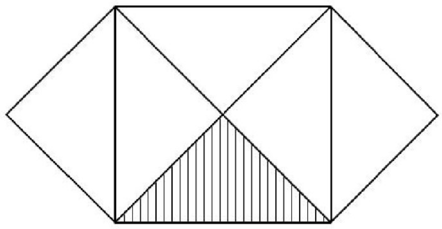

Рис. 1

Налицо противоречие. Как известно, Евклид занимался в своей школе эвристикой. Но в книгах «Элементов» следов эвристики не видно — по крайней мере, их не сумели разглядеть совсем не равнодушные к ценности этого сочинения люди. Вывод сделать несложно: Евклид, очевидно, сделал то, что хотел. Назначение эвристики — делать умнее учеников, а не демонстрировать ум и достижения учёного и преподавателя тем, кто способен это оценить. Ученикам мало что даёт демонстрация построенной единой конструкции языка и системы высказываний, истинность которых вытекает из истинности других высказываний (доказанных прежде или изначально принятых без доказательства). Её цель, очевидно, иная — явно предъявить тем, кто уже понимает смысл этой *организационной* задачи, вариант такой организации на материале математики. Судя по всему, это удалось: «Элементы» долго были недостижимым эталоном научности. В рамках решения такой задачи демонстрация истинности теоремы Пифагора выполнена Евклидом весьма оптимально.

[1] **Гайдук Ю.М.** Как решать задачу // Математическое просвещение. Вып. 1. М.: ГТТЛ, 1957. С. 256.

[2] **Литцман В.** Теорема Пифагора. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 38–39.

Возникает вопрос: можно ли, опираясь на текст Евклида, реконструировать его эвристическую практику — найти тот источник открытия, о котором говорил Лейбниц?

Ситуация любопытная. Ведь если удастся обнаружить следы эвристики Евклида и выйти на её истоки, то возникнет возможность увидеть, может ли эвристический опыт Евклида оказаться ценным сегодня. Уточним задачу. Требуется, исходя из содержания «Элементов», найти *элементарную* в смысле доступности всем деятельностную операцию, следствием использования которой оказались бы представленные Евклидом результаты.

Неожиданный Евклид: от теоремы Пифагора к ножницам

Итак, Евклидово доказательство теоремы Пифагора, метко названное Шопенгауэром «ходульным», никто не считает наглядным. Можно ли, исходя из него, установить ход его построения и выделить операцию, на которой оно основано? Оказывается, можно и даже совсем нетрудно.

Доказательство Евклидом Предложения 47[3] основано на следующей цепочке равенств треугольников:

$$BFH = BFC = BAD = BLD \text{ (рис. 2).}$$

«Равны не треугольники, а их площади! Это знают все… со школы». Могут так сказать, и будут правы. Сегодня равенство фигур понимают существенно у́же, а теорему Пифагора формулируют на языке площадей. Нетрудно, разумеется, написать, как это принято сегодня:

$$S_{BFH} = S_{BFC} = S_{BAD} = S_{BLD}.$$

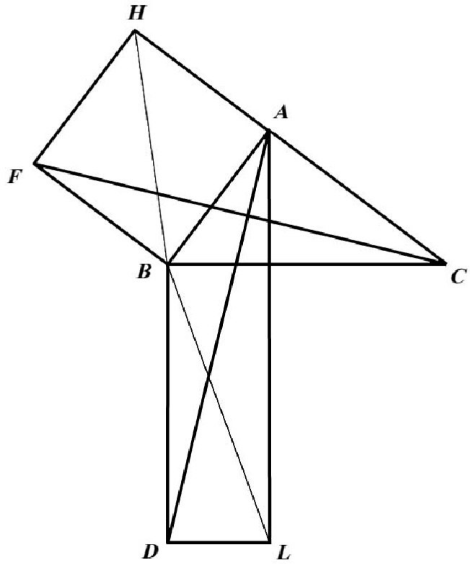

Рис. 2

Но… это предполагает предварительное введение числовой функции (величины)

$$S\text{: фигура} \to S_{\text{фигура}},$$

определённой, по крайней мере, для фигур, участвующих в построениях. Но у Евклида не так!

*В Первой книге у Евклида нет **величин**, а есть **отношение равенства!***

Это, в общем-то, понятно. С чего бы вдруг взяться количествам, числам и величинам! Появлению всего этого должны предшествовать некие организационные мероприятия — их ещё «измерениями» называют. Объекты «реальности» нужно уметь сравнивать; число — результат сравнения.

Сравнивать, уравнивать, выравнивать… — это всё синонимы; операциям с такими именами «равенство» должно, очевидно, предшествовать. Так что у Евклида всё естественно и всё на своих местах. Это-то и оказалось неожиданным[4].

Итак, Книга первая, **Предложение 47**:

> В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен < вместе взятым > квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

[3] НАЧАЛА ЕВКЛИДА. Книги I–VI. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 58–59.

[4] Специалисты по основаниям математики должны, конечно, это знать. Фигуры, которые Евклид называет «равными», Гильберт называет «эквивалентными», а переводчик и комментатор Д.Д. Мордухай-Болтовской «равновеликими». Евклидово отношение равенства в современной математике называется «отношением эквивалентности». Его свойства перечислены Евклидом в Аксиомах. Однако это знание не является общим для всех математиков местом, им теорема Пифагора известна только в числах.

В угловых скобках переводчик, Д.Д. Мордухай-Болтовской помещал добавления, «необходимые для понимания иногда слишком сжатого текста Евклида». Слова «…вместе взятым…» не потребовались бы, если бы в формулировке фигурировали числа; все знают, их можно складывать, образуя этим другие числа — суммы. Стало быть, кроме отношения «равенства» в предложении есть операция «взятия вместе», «составления» или «сложения» квадратов. Составить два произвольных квадрата вместе можно, разумеется, по всякому, но **как сложить их в квадрат**?

Теорема Пифагора в форме Евклида даёт простой алгоритм *сложения квадратов*, равно как и *вычитания* из большего квадрата меньшего: квадрат на гипотенузе — сумма, каждый из квадратов катетов — соответствующая разность.

В учебнике элементарной геометрии А. Киселёва[5] сразу вслед за теоремой Пифагора (п. 321), данной на языке размеров площадей, приводятся именно задачи на построение «суммы» и «разности» квадратов, а также задача построения квадрата, площадь которого находится в заданном отношении к площади данного квадрата (п. 322). Зачем там приводятся эти задачи, не вполне понятно; выглядят они как *применения* теоремы Пифагора вот к таким задачам на построение.

Зачем нужны эти построения? Если не дать внятного ответа на этот вопрос, возникает другой — зачем нужно учить решению этих «чертёжных» задач, где и когда они могут потребоваться в жизни?

Роджер Бэкон написал о математике в середине 13-го века: «Она предшествует другим наукам о природе, ибо изучает количество, которое воспринимается интуитивно»[6]. К этому высказыванию В.П. Шереметевский в скобках добавляет: «*intuitu intellectus*; Бэкон считал основные истины математики врождёнными, т. е. независимыми от опытного знания». В поле такого взгляда математика предстаёт как инструмент количественного описания мира.

В системе Евклида неясности нет. Предложение 47, предоставляя возможность заменить любую конечную совокупность квадратов одним им равным, сводит задачу сравнения самых разных фигур к сравнению квадратов (рис. 3). Сравнение квадратов, как видно уже не из самого Предложения, а из его доказательства Евклидом, легко сводится к сравнению отрезков, на которые разбивает гипотенузу опущенный из прямого угла перпендикуляр. Возникает численное отношение, в котором любой возможный квадрат находится с квадратом, выбранным в качестве эталона.

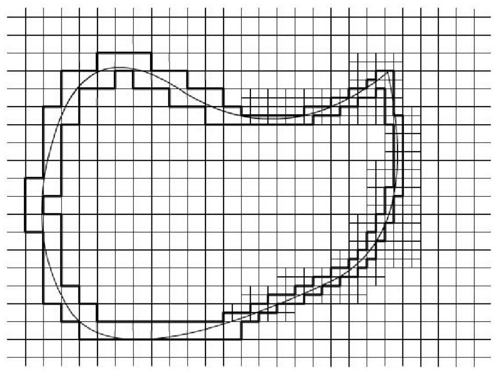

Рис. 3

Таким образом, теорема Пифагора оказывается важным звеном в цепочке организации измерения именно как процедура **сложения** квадратов. Но в этом качестве она оказывается ненужной, если понятие величины площади введено априори — из «врождённой интуиции». Система распадается.

Чтобы понять, в чём процедурно заключается сложение двух квадратов в квадрат, вернёмся к доказательству Евклидом теоремы Пифагора. Для его построения он пользуется описанными ранее (Предложения 37-40) классами равных треугольников. Это — треугольники, заключённые между двух параллельных. На одной из них располагаются их основания, на другой — вершины. *Если равны основания, равны и треугольники* (рис.4). Это означает, что все треугольники, получающиеся изменением положения вершины на «верхнем рельсе», равны между

[5] **Киселёв А.** Элементарная геометрия для средних учебных заведений. С приложением большого количества упражнений и статьи: Главнейшие методы решения геометрических задач на построение. М.: Т./Д. «Думнов, Клочков, Луковников и К°», 1913. С. 246–249.

[6] **Шереметевский В.П.** Исторический очерк развития анализа и его приложений к геометрии. В книге: Лоренц Г. Элементы высшей математики. Т. 1. М.: Т-во И.Д. Сытина, 1910.

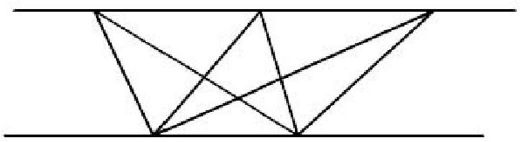

Рис. 4

собой. То же, разумеется, будет верно при изменении положения основания на «нижнем рельсе».

Это обстоятельство — прямое следствие наличия классов равных параллелограммов, которые Евклид вводит в Предложениях 35–36. ***Параллелограммы, заключённые между двух параллельных прямых, основания которых равны, равны между собой.*** Этот результат становится совершенно прозрачным, если выполнить очень простую операцию реорганизации такого участка (рис. 5). При повторении снова и снова этой операции параллелограммы будут становиться всё более и более «вытянутыми». «Тесто» же, из которого слеплен каждый из них, не привносится и не удаляется. Это обстоятельство и фиксируется отношением *равенства*, которым пользуется Евклид. В сущности, его РАВЕНСТВО — своеобразный ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА.

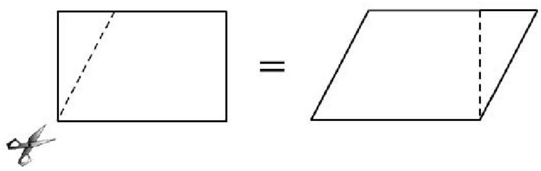

Рис. 5

Несмотря на доступность, в книгах «Элементов» эта операция явно не представлена; для доказательств (демонстраций истинности) она неудобна: их лучше строить сразу для общего случая, исходя из уже выстроенной, итоговой картины. Однако она очень полезна в эвристических целях. Возникающие с её участием задачи на сообразительность столь просты, что доступны в детском саду. Обретаемый таким образом опыт игры в реорганизацию формирует навык иного, можно сказать, «подвижного» видения. К примеру, совсем нетрудно *догадаться*, как квадрат на катете (рис. 6) в «два хода» превратить в прямоугольник, опирающийся на гипотенузу. Изучение переставляемых кусочков легко

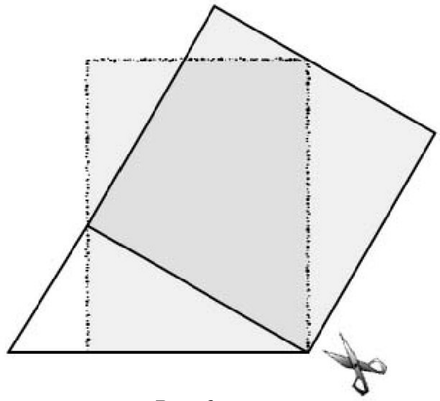

Рис. 6

позволит узнать в нём часть квадрата гипотенузы, пропорциональную занятой на ней части. Превращение квадрата с соседнего катета в прямоугольник, опирающийся на соседнюю часть гипотенузы, потребует несколько большей работы ножницами. Помимо полезного опыта это даст также стимул к переходу от «резания» к «вычерчиванию» итога. На таком пути неизбежно обретение «подвижного» видения; линии предстанут как образующие «тождественных», не добавляющих пространства преобразований параллелограммов и треугольников.

Наличие такого опыта уже не позволит стереть в сознании *базовую операцию*, которая сделала легко доступным обретение столь обогащённого зрения. Её состав — *отнимание, прибавление* и *равенство* — должен, следовательно, играть фундаментальную роль в Евклидовой картине математики. Все эти элементы операции реорганизации мы и обнаруживаем в самом начале Евклидовых книг в разделе **ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ** или **АКСИОМЫ**:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.

9. И две прямые не содержат пространства[7].

Ясно, что выделение состава операции и формулировка свойств его элементов — задача посильная очень многим, по существу, всем, если исходить из опыта обращения с нею. Без такого опыта Аксиома 9, например, может показаться странной, и её интерпретация может вызывать затруднения. В контексте же операции её смысл прост и ясен всякому: пары границ, возникающие при *отнимании* и исчезающие при *прибавлении*, пространства не имеют, ибо его не привносят и не удаляют сами эти операции. Это свойство характеризует выбор мысленной модели, ведь в материальном мире можно представить множество ситуаций, когда это не так[8]. Стало быть, её истинность следует принять без доказательства в качестве характерного свойства соответствующего мира мысленных моделей.

В итоговой форме заметить присутствие столь простой операции мешает восприятие текста «Элементов» как материала для выучивания и применения, в особенности, когда учебный процесс модернизирован под первенство *количества* и *величины* как *intuitu intellectus.* Судя по всему, Евклид не считал «математические истины» присущими человеку от природы, а видел в них последствия *организационного* опыта — так сказать, результат самой способности человека выполнять соответствующие *операции* по внесению и переустройству *порядка*. Поэтому величина у него — операция, операция сравнения, а строит он — *теорию измерений*. Если припомнить шок, испытанный физиками в XX веке, когда выяснилось, что физические величины суть операции[9], то математика Евклида становится современнее и много привлекательнее суррогатов, применяемых сегодня в образовании.

Итак, наглядная и доступная операция, позволяющая воображению каждого деятельно включиться в фундаментальное моделирование процесса измерения пространства, у Евклида присутствует, но в скрытом, расчленённом виде. Нет сомнения в том, что она использовалась в школе Евклида в процессе обучения, ведь результаты, представленные в «Элементах», оказываются решениями, в общем-то, нетрудных при наличии такого видения задач. Но практика эта оказалась, в итоге, эзотерической; экзотерическим же (внешним) её проявлением стали «Элементы» Евклида, выполненные как систематически организованная сводка результатов такого моделирования.

Проблемы, задачи, решения и оформление результатов

В связи с навыком *видения* равенства того, что выглядит *неравным*, следует всегда иметь в виду, что оно может и не возникнуть; «предложения» же можно запоминать и использовать, даже не видя их простоты и не понимая поэтому, с чего это они истинны. Достаточно, что их истинность доказана… «наукой». Именно по этому поводу Платон высказался в письме родственникам и друзьям Диона.

У меня самого по этим вопросам нет никакой записи и никогда не будет. Это не может быть выражено в словах, как остальные науки; только если кто постоянно занимается этим делом и слил с ним всю свою жизнь, у него внезапно, как свет, засиявший от искры огня, возникает в душе это сознание и само себя там питает. И вот что ещё я знаю: написанное и сказанное мною было бы сказано наилучшим образом, но я знаю также, что написанное плохо причинило бы мне

[7] НАЧАЛА ЕВКЛИДА. Книги I–VI. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 15.

[8] Так, например, помимо неизбежных и, в общем, тривиальных материальных потерь, разрезание может привносить и менее очевидные перемены. Оно немного деформирует, например, бумагу, ввиду возникновения дополнительного «пограничного» натяжения. Этот «дефект пространства» сходен с дефектом массы, который возникает при разделении связанной системы — работа по разрыву связи, увеличивает совокупную энергию системы.

[9] Величина «привязана» к специально организованной «измерительной» ситуации, которая делает её значения определёнными. Такая ситуация может быть несовместимой с измерительными ситуациями других величин. Например, это может означать, что любая попытка их измерения в данной ситуации, разрушает текущую ситуацию и потому принципиально не может дать определённого значения величины в этой ситуации. Возникает неопределённость и некоммутативность. Последнее означает, результат, вообще говоря, зависит от порядка, в котором организуются измерительные ситуации. Так, например, настройка «подсветки» движения электрона в поле притяжения ядра требует луча такой тонкости и, следовательно, энергичности, что «касание» им электрона выбивает его из поля притяжения ядра. Это означает, что в такой ситуации идея «положения» срабатывает только статистически. Это не позволяет реализовать идею «череды положений» и, значит, «скорости», а следовательно, и «траектории движения».

сильнейшее огорчение. Если бы мне показалось, что следует написать или сказать это в понятной для многих форме, что более прекрасного могло быть сделано в моей жизни, чем принести столь великую пользу людям, раскрыв всем в письменном виде сущность вещей? Но я думаю, что подобная попытка не явилась бы благом для людей, исключая очень немногих, которые и сами при малейшем указании способны всё это найти; что же касается остальных, то одних это совсем неуместно преисполнило бы несправедливым презрением, а других — высокой, но пустой надеждой, что они научились чему-то важному[10].

Из такой «малости», как операция реорганизации, потенциально многие способны обрести «видение равного» и через это выстроить всё, что необходимо для сравнения — измерения «геометрического блага», т. е. пространства. Мир точек, линий, фигур и тел прост и определёнен. Но не все к этому расположены внутренне. Рассказывают, что один ученик спросил Евклида, какую выгоду может принести ему изучение геометрии. Евклид на это приказал рабу дать ученику обол и добавил: «он хочет извлечь пользу из геометрии». Евклиду же приписывается известный афоризм об отсутствии «царского» пути в науке. Немногими, увы, движет внутренняя радость от обретения видения и понимания, таким людям лишние объяснения только мешают — они лишают их удовольствия самостоятельного открытия. Но без опыта такого простенького, доступного практически каждому открытия и связанного с ним мысленного моделирования трудно рассчитывать на успех в решении задач на «измерение блага» в сложном и неоднозначном мире «полиса»: «Негеометр да не войдёт!».

Что же можно открыть из «тождественных» деформаций фигур?

Становится ясной идея доказательства Евклидом теоремы Пифагора. Он просто «переливает» пространство половинок квадратов катетов в квадрат гипотенузы, заполняя при этом ровно его половину. Делается это так. Имеющиеся по построению «пути сообщения» позволяют привести пространство половины катета в касание с квадратом гипотенузы. Для этого вершина треугольника, содержащего половину пространства квадрата, перемещается из *H* в *C*. Соответствующее пространство перетекает в треугольник *BFC* (Рис. 7). Поворот треугольника на прямой угол по часовой стрелке пространства не прибавляет и не убавляет; он просто

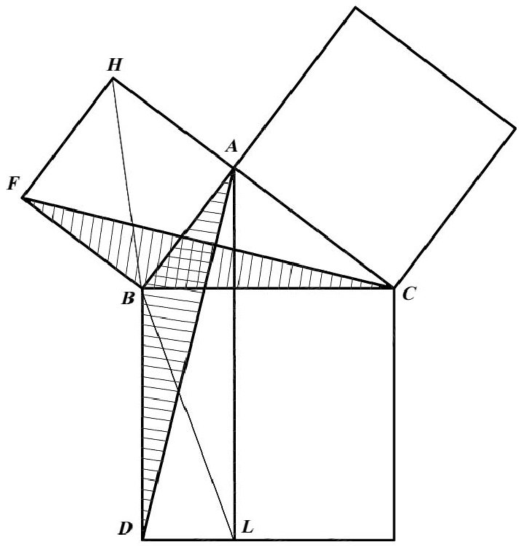

Рис. 7

размещает его в другом треугольнике *BAD*. Получаются «ходули» или «Пифагоровы штаны». Устройство последнего треугольника позволяет переправить ограниченное им пространство в квадрат гипотенузы. Это совершается сдвигом его вершины параллельно стороне *BD*. Из точки *A* её можно сместить в любую из двух точек на границе квадрата гипотенузы, например *L*. Так в итоговом чертеже появляется «рельс» *AL*, который — по случаю — оказывается перпендикуляром, опущенным из прямого угла треугольника на его гипотенузу. *Перпендикулярность* обязана своим появлением квадратам; признаком же, определяющим движение, является не она, а *параллельность* стороне квадрата гипотенузы.

Итак, маршрут перемещения пространства из половины квадрата *BFHA* в половину части квадрата гипотенузы проложен. Аналогично прокладывается маршрут перенесения пространства из половины квадрата другого катета в половину соседней части квадрата гипотенузы.

Ясно, что такая модель преобразования пространства квадратов принята ради эле-

[10] **Платон.** Соч. в 4-х т. Т.4. М.: Мысль, 1990. Письмо VII.

гантности итоговой картины. Всё то же самое можно проделать и с самими квадратами, правда, «ходули» (это по Шопенгауэру) или «штанишки» (в русской традиции) получатся иного фасона — чуть более мешковатыми (рис. 8).

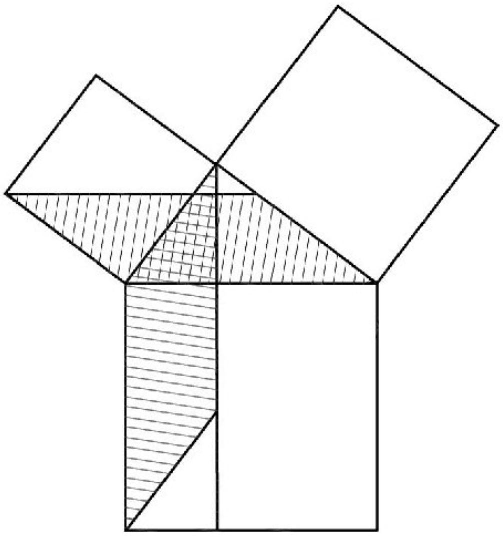

Рис. 8

Возможен, разумеется, и обратный процесс — *разложения* квадрата гипотенузы, но для этого нужно сообразить, почему рассечь квадрат следует именно по прямой, проходящей через вершину данного прямоугольного треугольника. Это если исходить из данности прямоугольного треугольника.

Любопытно, что задача разложения произвольного параллелограмма на параллелограммы же, в сумме дающие исходный, решается немедленно как простое «удвоение» чертежа для утверждения равенства параллелограммов, опирающихся основаниями на две параллельные прямые (Предложение 35 Евклида), которое следует из базовой операции, представленной на рис. 5. Нужно просто вместо двух параллельных прямых рассмотреть три (рис.9). Исходный параллелограмм как бы растянут вдоль любой рассекающей его прямой, параллельной основаниям — мы словно натянули своеобразную тетиву. Пространства *A* и *B* частей, на которые разделён исходный параллелограмм, перекочёвывает в «вытянутые» части. Теперь оно может занимать любой параллелограмм, зажатый между параллельными прямыми, на которые опираются их боковые стороны. В частности, пунктиром обозначены прямоугольники, содержащие те же пространства *A* и *B*. Таким образом, разделение одного параллелограмма на два, которые вместе содержат то же пространство,

$$C = A + B,$$

всегда связано с треугольником, сторонами которого являются основания параллелограммов, вмещающих пространства, участвующие в этом равенстве.

Можно, следовательно, взять *любой* треугольник, построить на двух его сторонах произвольные параллелограммы и сложить из них параллелограмм на третьей стороне, которая при этом разделится на два отрезка. Их отношение друг к другу *естественно принять* за отношение, в котором состоят пространства слагаемых параллелограммов. Этот результат впервые встречается у Паппа Александрийского, причём как «интересное обобщение теоремы Пифагора». Называют его теперь теоремой Паппа, поскольку у Евклида он явно не сформулирован.

Вряд ли, однако, можно сомневаться в том, что человек, придумавший «ходульное» перемещение пространств половинок «катетных» квадратов в половину квадрата гипотенузы, не видел этого простого следствия из своего Предложения, на котором базировалась вся остальная конструкция. Ясно другое. Чертёж 10 даёт общую конструкцию процедур *сложения* и *разложения* параллелограммов. Если складываются квадраты, то квадрат в результате возникает только тогда, когда стороны квадратов в точке «составления» образуют прямые, а не ломаные линии.

В школе Евклида, без сомнения, было известно много разных форм тождественного перераспределения пространства. Так, «детское» превращение квадратов катетов в части квадрата гипотенузы с помощью ножниц (рис. 6) приводит к рис. 10, который изоморфен рис. 9. Кроме того, он является тем, во что превращается рис. 1 в случае неравных катетов с той лишь разницей, что выполнение сложения квадратов (заштрихованные параллелограммы) приводит к возникновению «созерцаемой необходи-

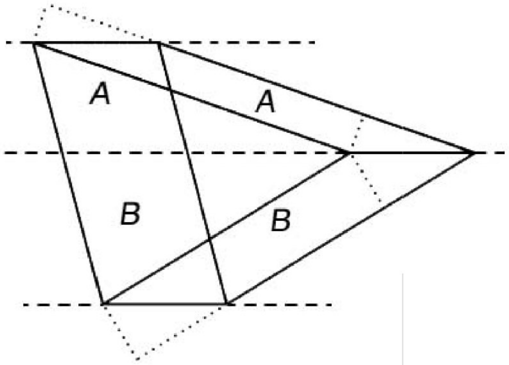

Рис. 9

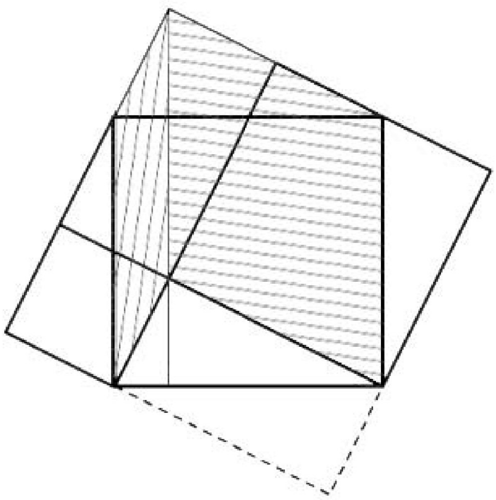

Рис. 10

мости», легко приводящей к разным способам доказательства. Так, если сделать его чертёж симметричным (пунктир), то он разделяется на две знаменитые картинки, которые принято считать «индийским доказательством» теоремы Пифагора (рис. 11); правая «разбивка» квадрата получается из левой соответствующим перемещением прямоугольных треугольников. Правда, на взгляд автора, несимметричная пара, которая получается сразу, без пунктирного добавления, ничуть не хуже «индийской».

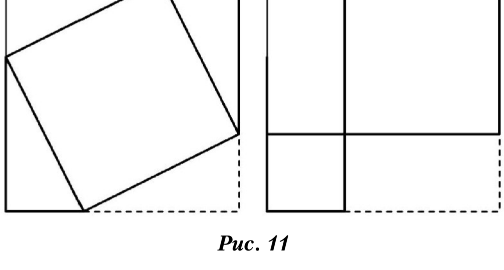

Рис. 11

Заключение. Немного о контекстной обработке информации

В основе «созерцательной необходимости», о которой говорил Шопенгауэр, лежит *счёт одинаковых* кусочков. Такое обозрение требует составленности из одинаковых элементов; сравнение пространств, заключённых в фигурах, сводится к сравнению их составов. Примитивная реорганизация пространства приводит к другому «зрению» и, соответственно, к другой «созерцательной необходимости». *Равным* становится выглядящее *неравным*, точнее — *неодинаковым*, и это видение *равенства* открывает путь к *сравнению* содержимого самых разных форм с содержимым форм эталонных. Складывается априорная мысленная конструкция (модель) процесса измерения пространства. «Складывается» — это значит, что она может быть сложена самостоятельно, в принципе, каждым. Информацию, благодаря которой становится возможным обретения такого видения предмета, можно называть *эвристической*. Ведь увидеть что-то для себя новое, значит открыть это.

Но ни модель измерения, ни примитивный организационный опыт, лежащий в её основе, не представлены в книгах Евклида. Их явного описания нет. Демонстрация истинности итоговых форм знания этого не требует. Выявление и обнаружение их *скрытого присутствия* требует анализа контекста системной организации итоговых форм знания. Другими словами, это результат *контекстного анализа* конкретной *информации*. Такой анализ, вероятно, можно было бы назвать *смысловым*, но для автора это синонимы. Настоящая работа, отчасти, иллюстрирует понимание автором слов «*контекстная обработка информации*».

Информацией является и стройно-последовательное, «медлительное» изложение Евклида, и любые формы визуально-деятельностного представления простейших операций с простейшими фигурами, а также связанные с этими операциями вопросы и выводы, возникающие в связи с этими вопросами. Ясно, что между этими типами информации имеется принципиальное различие. Разглядеть в стройности итоговых форм простоту и доступность первичного организационного опыта — значит увидеть творца, выстроив итоговые формы заново. Это не очень-то просто. Другое дело, если услышать от творца те «малейшие указания» (см. сноску 10) на такой первичный опыт, которые позволят всё остальное увидеть и сформулировать самостоятельно, быть может, получая попутно какие-то другие «малейшие указания». Это делает необходимым диалог с учителем и ненужным чтение изложения им предмета. Такие «малейшие указания» *есть всегда*, в любых итоговых формах научного знания! В этом, как, впрочем, и во всём вообще, можно усомниться. Поэтому это утверждение имеет статус **принципа познаваемости.**

Исходя из этого принципа, возникновению *любых* научных форм деятельности и организации знания предшествует априорное мысленное моделирование соответствующих явлений. Оно начинается с опознания сходства с чем-то знакомым и доступным в проявлениях, с каким-то организационным опытом. Принять «отношение сходства» (можно также сказать «равенства» или «эквивалентности») — значит заменить реальность моделью. Отождествление модельного организационного опыта с проявлениями бытия рождает язык. Найти эвристические корни научного предмета — значит найти эти внешние подсказки, выявить соответствующий первичный опыт. Сделать его доступным именно в связи с бытием предмета познания — значит открыть дорогу к посильному мысленному моделированию. В этом и состоит задача контекстной обработки предметной информации. Обнаруженные формы позволят отказаться от номинально-репродуктивного обучения в пользу обучения эвристического. ❑