**Владимир Дмитриевич Селютин,** *доктор педагогических наук, Орловский государственный университет*

# ВНУТРИПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ И ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КОМПЕТЕНТНОСТЬ

***Значимым моментом в модернизации отечественной системы образования явилось включение в содержание обязательного минимума математической подготовки учащихся общеобразовательной школы элементов стохастики: комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Начавшиеся изменения позволят преодолеть отставание России от стран с развитой системой образования, где вероятностно-статистическое содержание уже несколько десятилетий присутствует в школьном обучении.***

Опыт первых лет свидетельствует, что, несмотря на методически удачное фрагментарное изложение в ряде учебников, элементы стохастики пока ещё не охвачены внутрипредметными связями, им не удаётся преодолеть статус «инородности» внутри традиционной математики. Стохастическое содержание представлено в учебниках в виде отдельных разделов или параграфов. Традиционные же разделы остаются без изменений, тогда как использование статистико-вероятностных понятий могло бы способствовать закреплению изученного материала «обычных» тем математики.

Более того, включение элементов стохастики в школьный курс математики привело к сокращению времени, отводимого на повторение и изучение некоторых его тем. Это повлекло за собой сокращение числа решаемых на уроке задач, способствующих укреплению внутрипредметных связей.

В связи с этим остро встают проблемы методической подготовки будущих учителей к успешной реализации внутрипредметного взаимодействия нового содержания обучения со старым, интеграции потенциала стохастики, который используется неэффективно. Вклад в их решение может внести разработанный спецкурс «Элементы стохастики в средней школе».

Цель спецкурса в том, чтобы сформироваать методико-математическую готовность будущего учителя к обучению детей элементам стохастики в условиях согласованности их с традиционной математикой. Спецкурс ориентирован, с одной стороны, на то, чтобы вооружить учителя знанием концептуальных основ укрепления внутрипредметных связей средствами стохастики, а с другой — чтобы проводить логико-дидактический анализ школьных стохастических задач. В этом спецкурсе представлены примеры, связанные с раскрытием как интеграционных возможностей основных понятий стохастики, так и методики руководства учителем познавательной деятельностью учащихся.

На первой же лекции студенты узнают о причинах неудач в течение почти двухвекового движения за внедрение в отечественную среднюю школу элементов вероятностно-статистических знаний. Ретроспективный анализ программ и учебников по математике, разработанных на протяжении многих десятилетий, помогает понять, почему математикам-методистам прошлого не удавалось решить эту проблему: из-за того, что вводимый материал обособлен от основного курса ввиду отсутствия прочных внутрипредметных взаимосвязей между стохастическими представлениями и понятиями математики строгого детерминизма. Лишь в конце советского периода исследователи пришли к выводу о том, что статистика и вероятности должны вводиться в школьное обучение не отдельным, изолированным курсом, а в виде сквозной содержательно-методической линии, которая обеспечивала бы формирование, систематизацию и развитие *представлений* о стохастической природе (структуре) явлений окружающего мира. К тому времени в школьной математике уже сформировались: линия числа, функциональная линия, линия тождественных преобразований и т.д.

Но, несмотря на появление в XXI веке принципиально новых школьных учебников с элементами статистики, комбинаторики и теории вероятностей, новая стохастическая линия до сих пор окончательно не сформировалась. Чтобы это произошло, необходимо обеспечить преемственность всего изучаемого материала путём согласования традиционных и стохастических понятий, без чего невозможно построение полноценной содержательно-методической линии. Приводя конкретные примеры с использованием таких фрагментов, как сбор и регистрация статистических сведений, таблицы и диаграммы, простейшие статистические характеристики, вероятности и т.д., мы убеждаем студентов в том, что новое содержание обучения должно более органично входить в устоявшиеся разделы курса математики.

Затем студентам предлагаются примеры, которые демонстрируют связующие возможности элементов стохастики и преимущества включения их в содержание школьной математики в органичном единстве и сочетании всех линий. С одной стороны, при изучении традиционных разделов математики формируются понятия и навыки, на базе которых возникают вероятностно-статистические представления и методы. Например, лишь после того, как введено понятие дроби, имеет смысл говорить о частоте и вероятности как о количественных характеристиках. После того, как ученики познакомились с декартовой системой координат, можно рассматривать взаимосвязи двух статистических признаков.

С другой стороны, рассмотрение многих статистико-вероятностных понятий способствует закреплению изученного материала «обычных» тем математики. К примеру, использование различных способов нахождения средних характеристик и показателей разброса данных помогает развитию вычислительных навыков; нахождение геометрических вероятностей содействует усвоению понятия площади; рассмотрение стохастичесих зависимостей расширяет представления о сфере применений изучаемых функций и т.д.

Студенты видят, что введение в школьную математику стохастической содержательно-методической линии создаёт возможности для усиления внутрипредметных связей. Стохастика, представленная не отдельным курсом или изолированной темой, а растворённая во всей математической образовательной области, органически вплетаясь в канву традиционно изучаемого материала, предопределяет качественно иной характер внутренней логики математики как учебного предмета.

Так, студенты подходят к пониманию принципа интегративности построения стохастической содержательно-методической линии, который выражает необходимость интегрировать школьную математику посредством стохастического содержания. Согласно этому принципу, новая линия, являясь одной из равноправных самостоятельных содержательно- методических линий школьного курса математики, должна благотворно влиять на укрепление внутрипредметных связей.

Для осмысления характера деятельности учителя на стадии реализации принципа интегративности целесообразно предложить студентам ряд примеров, из которых видно, каким образом элементы стохастики можно «растворить» внутри привычной всем математики. Ключевая роль здесь отводится анализу школьных математических задач, источником которых являются реальные внематематические ситуации. Именно взаимосвязь между реальностью и её математической моделью, между теорией и практикой — главный фактор сближения стохастики с традиционной математикой. Умение привлекать к анализу реальных жизненных ситуаций весь комплекс школьных математических методов во взаимодействии с элементами стохастики является свидетельством успешной реализации принципа интегративности.

Использование средств стохастики уже на ранних этапах обучения математике, при изучении натуральных чисел, позволяет учителю ознакомить школьников со способами регистрации статистических сведений, обратить их внимание на случайный характер исходов опытов. Приведём только один пример из серии задач, которые предлагаются студентам для проведения логико-дидактического анализа *проникновения элементов стохастики* в тему «Натуральные числа».

**Задача 1.** Регина задумала число первого десятка и предложила Ире, Оксане и Тане угадать это число. Названные девочками числа записаны в таблице 1.

*Таблица 1*

| Имя | Ира | Оксана | Таня |
|---|---|---|---|
| Названное число | 5 | 7 | 4 |

Регина сказала, что все девочки ошиблись и что задуманное число нечётное, а Оксана ошиблась меньше, чем Ира. Какое число задумала Регина?

Анализируя задачу, студенты замечают, что представление задуманных чисел в виде таблицы позволяет в наглядной форме произвести их сравнение и, тем самым, дети постепенно приобщаются к простейшему анализу и составлению статистических таблиц.

Аналогично студенты убеждаются, что тема «Меньше или больше» даёт благодатные возможности для сравнения числовых данных статистических исследований и случайных экспериментов, в том числе и путём анализа таблиц и диаграмм с использованием координатного луча. Так, рассматривая разность между наибольшим и наименьшим значениями статистических данных, удобно подвести к понятию размаха. С понятиями «больше» и «меньше» вполне естественно увязывается разговор о «более возможных», «менее возможных», «маловероятных», «очень вероятных» и «равновозможных» событиях. Также появляются благоприятные условия, чтобы в этой теме познакомить учеников с понятиями моды и медианы. Здесь же пятиклассники могут испробовать комбинаторный перебор вариантов.

Введение дробных чисел — новый, после введения нуля, этап расширения понятия о числе. Понятие дроби воспринимается детьми с трудом, поэтому будущий учитель должен утвердиться в важности жизненно-практических элементов наглядности, которыми располагает рассмотрение статистических данных. Доли и обыкновенные дроби также вполне согласуются с рассмотрением стохастических ситуаций, при этом рождается новое понятие «частота». Поэтому изучение окружности и круга вполне естественно связать с понятием круговой диаграммы, используя её для развития вероятностных представлений учащихся.

С анализа следующей задачи начинаем со студентами разговор об укреплении взаимосвязей между числовой и формально-операционной линиями.

**Задача 2.** Учитель биологии поручил ребятам измерить длину 10 листьев берёзы. Выполняя это задание, Лена заполнила таблицу 2. Составьте таблицу частот. Выразите частоты в процентах. Постройте круговую диаграмму. Найдите среднее арифметическое этих данных.

*Таблица 2*

| Номер опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Длина в см | 4,5 | 3,5 | 3,8 | 4,5 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 4,8 | 4,5 | 4,8 |

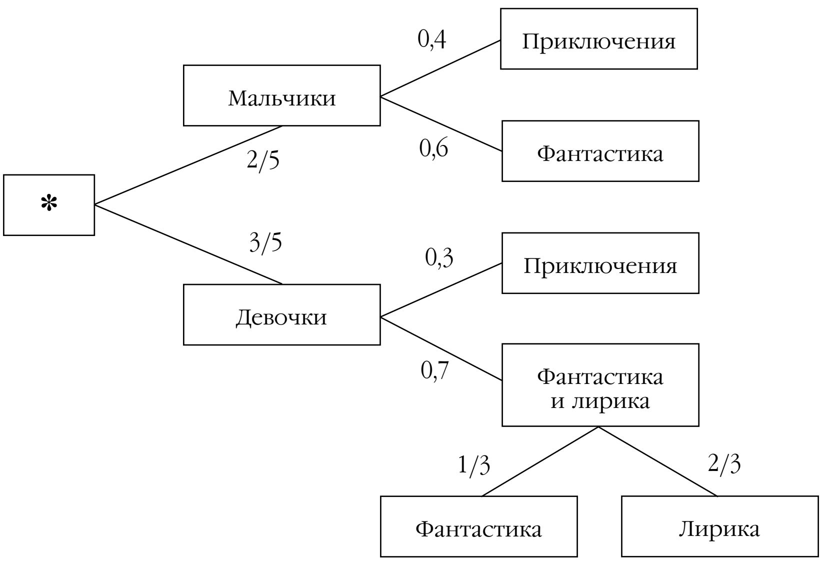
Она устанавливает взаимосвязь статистики с такими вопросами традиционного курса математики, как преобразование обыкновенных и десятичных дробей, арифметические действия с дробями, вычисление процентов, окружность и круг, транспортир, градусные меры угла.

Включение элементов стохастики в формально-операционную линию способствует укреплению внутрипредметных связей между такими разделами, как «Отношения и пропорции», «Выражения и тождества», «Приближённые вычисления» и др. Так, в теме «Нахождение дроби от числа и числа по его дроби» уместна следующая задача.

**Задача 3.** Директор книжного магазина «Всезнайка» планирует заказ новой художественной литературы. Среди покупателей в течение месяца было 360 мальчиков и 540 девочек. Каждый покупатель приобрёл только одну книгу. Книги о приключениях купили 40% мальчиков и 30% девочек. Остальные мальчики выбрала фантастику. Треть девочек выбрали себе фантастическую литературу, а остальные девочки — лирические произведения. Какой вид художественной литературы покупали чаще? Реже? Найдите соответствующие частоты. Сколько процентов книг каждого вида заготовит, вероятнее всего, владелец магазина на предстоящую неделю?

Обращаем внимание студентов на то, что решение задачи целесообразно проиллюстрировать рисунком 1. Такие рисунки способствуют пропедевтике интуитивно понимаемого правила умножения вероятностей, зрительной опорой которого служит дерево, на ветвях которого они записаны.

*Рис. 1*




На ряде примеров студенты убеждаются, что вероятностно-статистическое содержание помогает закреплению навыков составления числовых выражений, вычисления значений сумм и произведений. Например, они вполне могут самостоятельно прийти к выводу, что в тему «Рациональные дроби» целесообразно включить задачи следующего типа.

**Задача 4.** Найдите допустимые значения переменной р в выражении: $\frac{p^2+2}{p-1}$ и знак дроби, если р — вероятность некоторого события.

А вот преодолеть устоявшееся мнение об инородности самого понятия «вероятность» не так просто. Казалось бы, вероятность никак не увязывается с понятиями привычной всем школьной математики. Однако рассуждения студентов можно направить следующим образом. К моменту введения этого понятия у шестиклассников уже сформированы необходимые представления о «более возможных» и «менее возможных» событиях. Они понимают, что числами выражают количество объектов, а также длины, площади и объёмы. Решая задачи о случайном попадании «точки» (горошины, крупинки, мяча и т.д.) внутрь фигур различной площади, учащиеся смогут осуществлять качественное сравнение возможности наступления рассматриваемых событий.

Хорошо понимая, что различные фигуры могут иметь разные площади, учащиеся сопоставят это с тем, что и события могут иметь разные шансы для наступления: одни более возможны, а другие менее возможны. По аналогии с площадью фигуры, возможность наступления события можно выразить числом. Такое число, скажет им учитель, называют вероятностью события.

Как же найти это число? Такой вопрос неизбежно возникнет на уроке. Когда дети ещё не знали формулу площади круга, то вычисляли её приближённо при помощи палетки, то есть экспериментально. Также можно вычислить вероятность события, если провести опыты, наблюдения, измерения и т.д. Рассказывая об опытах Бюффона и Пирсона, учителю предстоит объяснить шестиклассникам, что число 0,5 есть вероятность выпадения герба (орла) при подбрасывании «правильной» монеты. Обсуждая далее результаты экспериментов с канцелярской кнопкой, привести к выводу, что число 0,6 можно принять за вероятность выпадения кнопки острием вверх, а число 0,4 — за вероятность выпадения острием вниз.

Возвращаясь к приближённым значениям площади фигуры, обратим внимание, что они могут быть различными, однако точное значение площади фигуры единственное. Аналогично, частота события получается различной в разных исследованиях. Но при большом числе наблюдений частоты группируются (за редким исключением) около теоретически ожидаемого числа, которое и является вероятностью данного события.

Таким образом, студенты приходят к выводу, что в целях укрепления внутрипредметных связей наиболее благоприятным местом для ознакомления школьников с понятием «вероятность события» является тема «Длина окружности и площадь круга». Дальнейшее изучение понятия вероятности целесообразно увязывать с оценкой погрешностей.

**Задача 5.** Римма заинтересовалась: чему равна площадь фигуры, заключённой между графиками функций $y = 3x$ и $y = x^2$ ? Она вырезала фигуру из бумаги, положила в картонный ящик с дном площадью 40 кв. единиц и бросила наугад в ящик 50 крупинок пшена. На эту фигуру упали семь крупинок, а остальные оказались вне фигуры. Чему равно найденное Риммой приближённое значение площади фигуры, и какова абсолютная погрешность, если сестра, студентка университета, назвала точное значение площади этой фигуры: 4,5 (кв. единиц)? Какими причинами можно объяснить столь значительную погрешность?

Обсуждая ситуацию, полезно привести к выводу, что Римме, по-видимому, не удалось добиться равновозможности исходов эксперимента. Кроме того, для получения более точного результата требуется увеличить количество опытов.

По собственному опыту студенты знают, что при решении уравнений часто задействуются самые различные элементы других тем. Стохастическое содержание расширяет возможности математизации неоднозначных явлений реального мира посредством уравнений, усиливая взаимопроникновение составляющих курса математики. Например, следующая задача связывает между собой составление уравнений и наложение ограничений на числовое значение буквенной величины, свойства дробей и пропорций, тождественные преобразования.

**Задача 6.** Затрудняясь в решении квадратных уравнений, восьмиклассник Максим пришёл за помощью к десятикласснику Кириллу. В это время к Максиму обратилась трёхлетняя племянница Кирилла Даша: угадать количество красных яблок, которые она положила в корзину. При этом она сообщила ему лишь то, что, кроме красных, в корзине находятся только два зелёных яблока. Зная ответ, Кирилл дополнительно подсказал, что вероятность вынуть из корзины два зелёных яблока подряд (без возвращения) равна 0,1. Сколько красных яблок в корзине у Даши?

Линия уравнений и неравенств обогащается благодаря стохастике новым содержанием, что значительно усиливает её интегрирующий потенциал.

Следующая задача помогает укрепить внутрипредметную взаимосвязь между преобразованием обыкновенных дробей в десятичные, определением части от числа, представлением данных в виде процентов, составлением и решением уравнений по условию задачи, осуществлением тождественных преобразований.

**Задача 7.** В коробке лежали красные и синие шары. Проведя многочисленные опыты, нашли частоту события «Вынутый наудачу шар имеет красный цвет»: $\frac{91}{300}$. После этого положили в ту же коробку 18 красных и два синих шара и снова провели эксперимент: частота указанного события оказалась $\frac{179}{300}$. Оцените вероятности этого события в двух различных условиях испытания. Сколько красных шаров было в коробке первоначально?

Полезно рассмотреть со студентами основные этапы решения задачи. Вероятность события в первоначальных условиях приближённо равна 0,3, а в новых условиях 0,6. Поэтому можно считать, что сначала в коробке лежало примерно 30% красных шаров, а после пополнения их стало примерно 60%. Обозначив за x первоначальное количество всех шаров, получим уравнение:

$0{,}3 \cdot x + 18 = 0{,}6 \cdot (x + 18 + 2)$, откуда $x = 20$.

Вероятно, красных шаров было $0{,}3 \cdot 20 = 6$.

Готовясь к урокам по теме «Системы уравнений с двумя переменными», будущий учитель должен хорошо представлять, что и в неё также вполне логично вписывается новый стохастический компонент. Приведём задачу, иллюстрирующую внутрипредметную взаимосвязь указанной темы между такими вопросами, как составление линейных уравнений и наложение ограничений на числовое значение буквенной величины, нахождение части от числа, свойства дробей и пропорций, тождественные преобразования.

**Задача 8.** Придя с рыбалки, студент Михаил загадочно сказал сестре-восьмикласснице Полине: «Я поймал 28 рыб: карпов и карасей. Вероятность наугад вынуть карпа из ведёрка с уловом больше вероятности вынуть карася на её треть. Сколько карпов я поймал и сколько карасей?». Какой правильный ответ он ожидает услышать от Полины?

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{28} = \dfrac{y}{28} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{y}{28}\,, \\ x + y = 28\,, \end{cases}$$

где x — число карпов, y — число карасей.

Взаимосвязь элементов стохастики с содержанием раздела «Неравенства» можно показать, в частности, предложив следующую задачу.

**Задача 9.** В корзине находятся два красных и несколько зелёных яблок. Сколько зелёных яблок в корзине, если известно, что вероятность наудачу вынуть первым зелёное яблоко меньше $\frac{5}{7}$ и больше $\frac{3}{5}$?

Геометрический способ подсчёта вероятностей полезно закреплять, привлекая системы неравенств с двумя переменными.

**Задача 10.** Авторучкой наудачу (не глядя) ставится точка обязательно в любое место области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} y \le x; \\ x \le 5; \\ y \ge 0. \end{cases}$$

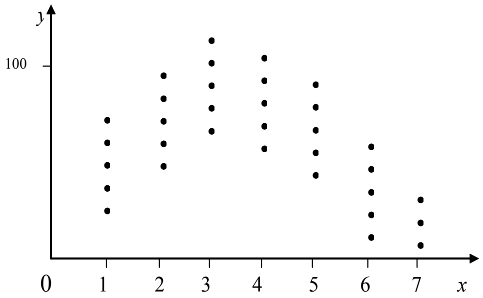
Какова вероятность, что точка попадёт в область, заданную системой неравенств:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 3; \\ 0 \le y \le 2? \end{cases}$$

При изучении методики математики студенты узнают, что функциональной линии всегда отводилась особая роль в интеграции школьной математики. Теперь надо обратить их внимание на то, что вероятностно-статистические представления могут оказать существенную помощь при изучении свойств различных функций, а функциональная пропедевтика приобретает новые, стохастические оттенки. Понятие функциональной зависимости будет лучше осознаваться учащимися в сопоставлении со стохастическими зависимостями.

**Задача 11.** На рисунке 2 представлены сведения о зависимости массы плодов помидоров (y) от количества поливов (x). Какой линией можно приближённо выразить закономерность изменения массы плодов помидоров в зависимости от количества поливов? Графиком какой функции является эта линия, если она проходит через начало координат, а точки A(3;120) и B(5;100) лежат на ней?

*Рис. 2*




Примером влияния стохастики на укрепление взаимосвязей между линией уравнений и неравенств с функциональной линией служит следующая задача.

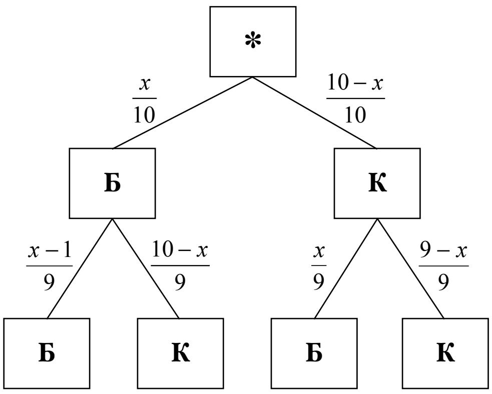
**Задача 12.** Валерия и Влада решили положить в коробку 10 шариков двух видов: белые и красные. Они будут наудачу вынимать из коробки одновременно два шарика. Если шарики окажутся разного цвета, то выигрывает Валерия, а если они будут одного цвета, то выигрывает Влада. Сколько белых шариков заинтересована положить в коробку каждая из них, чтобы вероятность выиграть для неё была наибольшей?

В отличие от вузовского способа решения, студенты рассматривают методические приёмы, привлекая наглядные средства (рис.3). Обозначив х — число белых шариков в коробке, — записывают

$\frac{x}{10} \bullet \frac{10-x}{9} + \frac{10-x}{10} \bullet \frac{x}{9}$ — вероятность выигрыша Валерии,

$\frac{x}{10} \bullet \frac{x-1}{9} + \frac{10-x}{10} \bullet \frac{9-x}{9}$ — вероятность выигрыша Влады.

*Рис.3*



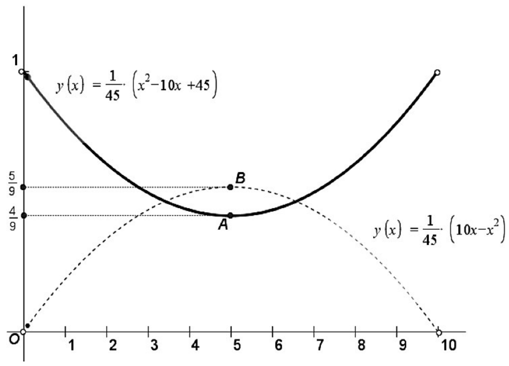

Далее исследуют две функции (рис.4):

$$y = \frac{1}{45} \bullet (10x - x^2) \text{ и}$$

$$y = \frac{1}{45} \bullet (x^2 - 10x + 45).$$

Первая достигает наибольшего значения при х = 5, поэтому Валерия заинтересована положить в коробку пять белых шариков. При исследовании второй функции следует принять во внимание, что $0 \le y \le 1$, а $0 < x < 10$. Поэтому Влада заинтересована положить в коробку либо один белый шарик, либо девять белых.

*Рис.4*




Тема «Абсолютная и относительная погрешности» даёт возможность для продолжения накопления интуитивных представлений о случайных ошибках измерений. Взаимодействие с эмпирическим материалом помогает заметить важное свойство среднего арифметического: при большом числе опытов точное значение измеряемой величины а мало отличается от среднего арифметического $\bar{x}$ измеренных значений. То есть выполнение равенства $a \approx \bar{x}$ является очень вероятным событием.

С помощью следующей задачи проиллюстрируем студентам взаимодействие вероятностно-статистической, формально-операционной, числовой линий, а также линии уравнений и неравенств.

**Задача 13.** С помощью пружинных весов домашнего пользования несколько раз измерили массу арбуза:

5,25; 5,2; 5,3; 5,25; 5,35; 5,5; 5,25; 5,3 (кг).

Чему приближённо равна масса арбуза? Какова точность этого приближённого значения?

Анализируя задачу, студенты выясняют, что в ходе её решения, кроме стохастического содержания, применяется традиционная математика: арифметические действия над десятичными дробями, понятие модуля числа, представление десятичных дробей в виде процентов, составление неравенств.

Вычисляют моду, медиану и среднее арифметическое заданных чисел. Приходят к выводу, что из трёх средних характеристик предпочтение здесь следует отдать среднему арифметическому. Поэтому записывают приближённое равенство для массы $m \approx 5{,}3$. Разность между наибольшим измеренным значением и средним арифметическим равна $5{,}5-5{,}3 = 0{,}2$, а разность между средним арифметическим и наименьшим измеренным значением равна $5{,}3 - 5{,}2 = 0{,}1$.

Поэтому $|m - 5{,}3| \leq 0{,}2$. Масса арбуза равна 5,3 кг с точностью до 0,2. Относительная погрешность не превышает $\left|\frac{0{,}2}{5{,}3}\right| < 0{,}04 = 4\%$.

Памятуя о том, что изучение в школе арифметической и геометрической прогрессий сопровождается решением текстовых задач, студены приобщаются к наполнению сюжетов стохастической тематикой. Примером этому может служить методический анализ решений следующих двух задач.

**Задача 14.** При проведении математической викторины одна из команд должна была определить количественный состав находящихся в пакете пятнадцати жетонов трёх видов: синего, красного, зелёного. Дополнительно участникам викторины сообщили, что искомые числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. С разрешения жюри команда провела опыты, вынимая наугад по одному жетону (с возвращением). Результаты опытов были представлены таблицей 3.

*Таблица 3*

| Цвет жетона | Синий | Красный | Зелёный |
|---|---|---|---|
| Число опытов | 9 | 19 | 22 |

Какой из следующих ответов наиболее вероятно согласуется с результатами проведённых опытов:

1) синих 2; красных 5; зелёных 8;
2) синих 7; красных 5; зелёных 3;
3) синих 3; красных 6; зелёных 6;
4) синих 4; красных 5; зелёных 6;
5) синих 3; красных 5; зелёных 7;
6) синих 3; красных 6; зелёных 7 ?

**Задача 15.** Имеется два билета в цирк, на которые претендуют трое ребят: Артур, Борис и Владислав. Они решили поступить так. Из набора шашек взять две белых и одну чёрную, положить в тёмный пакет и в алфавитном порядке по очереди вынимать наудачу по одной. Каждый имеет право на одну попытку. Кто первым вынет чёрную шашку, тот не получит билет в цирк. Если чёрную шашку никто не вынет, то они сдадут билеты в кассу. Владислав настаивает, чтобы вынутая шашка каждый раз возвращалась обратно. Как следует поступить другим ребятам, если решение принимается большинством голосов?

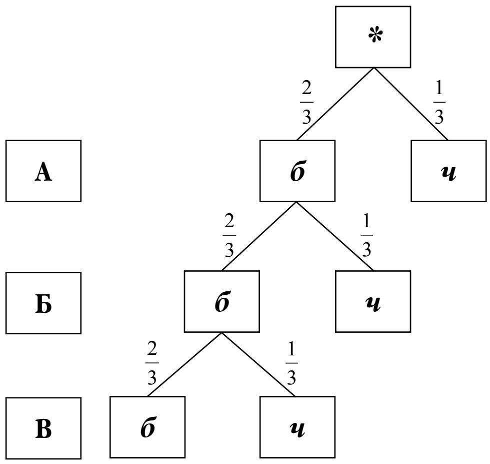
Построив дерево для выбора шашки с возвращением (рис.5, А — чёрную шашку вынимает Артур, Б — чёрную шашку вынимает Борис, В — чёрную шашку вынимает Владислав), учащиеся убеждаются, что шансы мальчиков на чёрную шашку уменьшаются с каждой попыткой. Действительно:

$$P(А) = \frac{1}{3},\ P(Б) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3},\ P(В) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}.$$

Вероятности образуют геометрическую прогрессию. При таком выборе шансы на чёрную шашку у Владислава наименьшие.

Если из условия задачи исключить договорённость об ограничении числа попыток и возвращении билетов в кассу, то розыгрыш окажется бесконечным.

*Рис. 5*




В таком случае применяется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Например, вероятность того, что чёрную шашку вынет Артур, равна

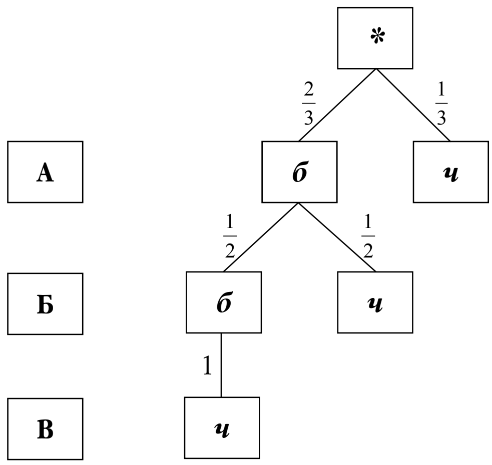
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6+\ldots=\frac{9}{19}.$$

Дерево для выбора без возвращения (рис.6) показывает, что игра в этом случае справедливая. Действительно:

$P\,(А) = \frac{1}{3}$, $P\,(Б) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P\,(В) =$
$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{3}$.

Нельзя также оставить без внимания студентов тот факт, что эмпирический аспект проникает теперь и в школьную геометрию. Не только в алгебре, но и в геометрии имеются возможности для проведения статистических исследований и формирования вероятностных представлений учащихся.

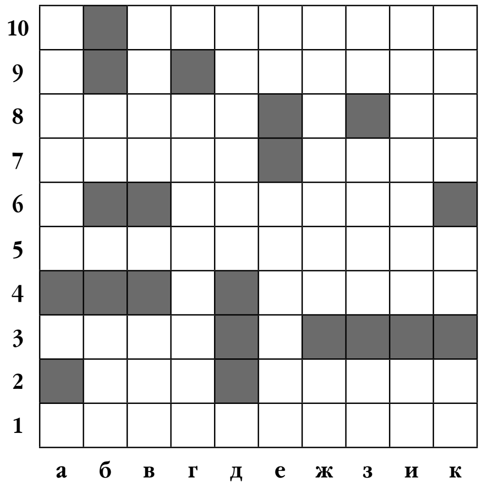
*Рис. 6*




Примером могут служить задачи на экспериментальное доказательство теорем о свойстве сторон и углов треугольника, экспериментальное доказательство теоремы Пифагора, которые в дальнейшем доказываются теоретически: путём логических рассуждений. Начинать же стохастическую пропедевтику, опираясь на геометрические представления, можно гораздо раньше. Об этом студенты узнают, рассмотрев, в частности, задачу 16.

**Задача 16.** Игорь и Рита играют в «Морской бой» (рис. 7). Игорь уничтожил все трёхпалубные и двухпалубные корабли Риты, а Рита уничтожила все однопалубные и четырёхпалубный корабли Игоря. У кого из игроков больше возможность победить в конце игры? Проверьте свой вывод путём эксперимента.

*Рис. 7*




Будущий учитель должен быть готов направить рассуждения школьников следующим образом. Игорю остаётся угадать восемь клеток, а Рите надо угадать 12 клеток. Игорю легче убить четырёхпалубный, но труднее находить однопалубные корабли. Человек, не имеющий достаточного опыта в такой игре, может предположить, что Игорь имеет больше шансов на победу, чем Рита (ведь ему остаётся угадать меньше клеток). Опытный игрок скажет, что однопалубные корабли искать труднее, чем двухпалубные и трёхпалубные. Пусть ученики проверят свои гипотезы в игре. Скорее всего, результаты игры окажутся в пользу Риты. Однако достоверно гарантировать ответ нельзя.

Изучая теорию вероятностей в вузе, студенты сталкивались с известной задачей «об игле Бюффона». На первый взгляд недоступная для детей, она наводит на мысль о возможности установления опытным путём факта постоянства отношения длины окружности к её диаметру (число $\pi$). Поэтому студенты с интересом воспринимают методические особенности следующего задания для пятиклассников.

**Задача 17.** Найдите небольшой стержень (гвоздь 30 мм, иглу, спицу). Большой лист бумаги разлинуйте параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на одинаковом расстоянии, в два раза большем длины стержня. Наудачу подбрасывая стержень, фиксируйте события: «Стержень пересекает прямую линию», «Стержень не пересекает прямую линию». Заполните таблицу частот. Вычислите число, обратное частоте события «Стержень пересекает прямую линию». Сравните с результатами товарищей.

После выполнения этого задания каждым учеником учитель направляет коллективную работу школьников следующим образом. Целесообразно составить сводную таблицу результатов, полученных всеми учениками класса, а если возможно, нескольких классов. Ученики замечают, что частота события «Стержень пересекает прямую линию» примерно в два раза меньше частоты события «Стержень не пересекает прямую линию». То есть они примерно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ .

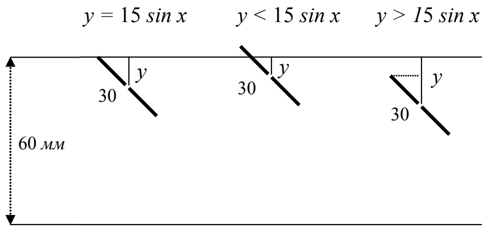
Под руководством учителя ребята с помощью компьютера могут получить сведения по имитации 10000, затем 200000 и т.д. подобных опытов. И подметить закономерность: при большом количестве опытов число, обратное частоте события «Стержень пересекает прямую линию», близко к $\varpi \approx 3{,}14$.

Объяснение этого факта будет доступно им позже: после ознакомления с геометрической вероятностью, синусоидой и интегралом. Возвращаясь к этой задаче в старшей школе, целесообразно использовать стохастическую тематику для повторения пройденного материала.

Обозначив y — расстояние от середины стержня до ближайшей прямой, x — величину угла между стержнем и прямой, можно получить равенство:

$y = 15 \sin x$ и неравенства $y < 15 \sin x$ , $y <$ $<15 \sin x$ (рис.8).

*Рис. 8*




Мерой исходов, благоприятствующих событию «Стержень пересекает прямую линию», может служить площадь $S_1$ фигуры, определяемой системой неравенств (рис. 9).

$$\begin{cases} y \le 15 \cdot \sin x \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Получаем:

$$S_1 = \int_0^{\pi} 15 \sin\ x\ dx = 30,$$

$$S_2 = 30\pi.$$

Вероятность рассматриваемого события равна

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{30}{30\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, на конкретных примерах будущий учитель убеждается в том, что статистико-вероятностное содержание органично переплетается внутри «обычных» тем математики, способствуя их закреплению. При этом открываются резервы поиска учебного времени для новой стохастической линии. Глубокое видение внутрипредметных связей и умение их использовать становятся неотъемлемым компонентом профессиональной компетентности учителя математики.

*Рис. 9*