

Задача о «пифагоровых тройках»

Г.Е. Юбко

Автор: Юбко Галина Евгеньевна, учитель математики средней школы № 3 г. Спасск-Дальнего Приморского края.

Предмет: Математика.

Класс: 8.

Тема: Теорема Пифагора.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Минимальный.

Текст задачи: Пифагоровы тройки известны очень давно. В архитектуре древнемесопотамских надгробий встречается равнобедренный треугольник, составленный из двух прямоугольных со сторонами 9, 12 и 15 локтей. Пирамиды фараона Снофру (XXVII век до н. э.) построены с использованием треугольников со сторонами 20, 21 и 29, а также 18, 24 и 30 десятков египетских локтей. А с помощью верёвочки с 12 узелками в древности можно было построить прямоугольный треугольник. Как это можно сделать и при чём здесь Пифагор?

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните ваши выводы с выводами известных людей.

Возможные информационные источники

Web-сайты:

<http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/books.php?book=3&page=3>

http://ru.wikipedia.org/wiki/Пифагоровы_числа

<http://www.inauka.ru/blogs/article65907/print.html>

Культурный образец

Горин Е.А. Степени простых чисел в составе пифагоровых троек // Математическое просвещение. 2008. № 12. С. 105–125.

С теоремой Пифагора связана арифметическая задача. Имеются такие тройки натуральных (т. е. целых положительных) чисел x , y , z , что

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

Их называют пифагоровыми тройками. Например, годятся числа $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; $9 + 16 = 25$. Это пример. А можно ли указать все пифагоровы тройки (x, y, z) ? Иными словами, можно ли найти все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах? (В связи с терминологией обратите внимание, что решение —

это не одно число, а три.) Да. Ответ таков: каждое такое решение можно представить в виде

$$\begin{aligned}x &= l(m^2 - n^2), \\ y &= 2lmn, \\ z &= l(m^2 + n^2),\end{aligned}\quad (2)$$

где l, m, n — натуральные числа, причём $m > n$, или в аналогичном виде, в котором x и y меняются местами. Можно чуть короче сказать, что x, y, z из (2) со всевозможными натуральными l и $m > n$ суть все возможные решения (1) с точностью до перестановки x и y . Например, тройка (3, 4, 5) получается при $l = 1, m = 2, n = 1$.

То, что при любых натуральных l, m, n с $m > n$ тройка (x, y, z) , определяемая согласно (2), является решением (1), можно проверить непосредственно путём простого вычисления. Почему любое решение обязательно имеет вид (2)?

По-видимому, вавилоняне знали этот ответ, но как они к нему пришли, — неизвестно.

Сперва несколько простых замечаний, которые предшествуют и обычному доказательству. Если x, y и z имеют общий делитель $k > 1$, скажем $x = ku, y = kv, z = kw$, где u, v, w — натуральные числа, то ясно, что тройка (u, v, w) снова является решением (1). Обратно, если мы знаем какое-то решение (x, y, z) , то, умножив эти три числа на какое-нибудь натуральное k , мы снова получим решение. Поэтому можно ограничиться разысканием решений, не имеющих общего делителя. В данный момент речь идёт об общем делителе всех трёх чисел. Но если бы у двух из этих чисел, скажем у x и y ,

был общий делитель, то тот же делитель был бы и у третьего. Поэтому мы можем ограничиться разысканием решений, в которых любые два числа $(x$ и y, x и z, y и $z)$ не имеют общих делителей, больших 1. Это выражают словами: рассматриваемые числа x, y, z попарно взаимно просты.

При l отличным от 1 числа x, y, z в (2) не взаимно просты: они имеют общий делитель l . Так что если мы интересуемся только взаимно простыми x, y, z , то для них в (2) должно быть $l = 1$, и утверждение, которое мы хотим доказать, несколько упрощается: натуральные решения (x, y, z) уравнения (1) с взаимно простыми x, y, z с точностью до перестановки x и y представимы в виде

$$\begin{aligned}x &= m^2 - n^2, \\ y &= 2mn, \\ z &= m^2 + n^2,\end{aligned}\quad (3)$$

где m, n — натуральные числа и $m > n$. Решением эта тройка будет, но числа x, y, z не обязательно получатся взаимно простыми. Ведь если у m и n есть общий делитель, то он войдёт (даже с квадратом) и в x , и в y , и в z .

Треугольник, стороны которого равны пифагоровым числам, является прямоугольным. Кроме того, любой такой треугольник является героновым, то есть таким, у которого все стороны и площадь являются целочисленными. Простейший из них — египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Этот факт использовался египтянами для построения на местности прямых углов, ведь оптических измерительных приборов тогда ещё не

было, а для строительства домов, дворцов и тем более гигантских пирамид надо было уметь строить прямые углы.

На тонкой верёвке делают метрии, делящие её на 12 равных частей, связывают концы, а затем растягивают верёвку в виде треугольника со сторонами 3, 4, 5. Тогда угол между сторонами 3 и 4 оказывается прямым. То есть если стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 5, то этот треугольник прямоугольный.

Некоторые пифагоровы тройки (отсортированы по возрастанию максимального числа, выделены примитивные):

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 15, 17), (12, 16, 20), (15, 20, 25), (7, 24, 25), (10, 24, 26), (20, 21, 29), (18, 24, 30), (16, 30, 34), (21, 28, 35), (12, 35, 37), (15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41), (14, 48, 50), (30, 40, 50)...

Методический комментарий

Учащиеся должны выделить для информационного поиска следующие слова: «пифагоровы тройки», «теорема Пифагора», «применение теоремы Пифагора на практике».

Практическая ценность задачи состоит в том, что она важна для дальнейшего рассмотрения, так как подобный материал используется в олимпиадных и экзаменационных работах. Знания о теореме Пифагора и её применении обязательны в школьном курсе математики. «Пифагоровы тройки» можно использовать при работе над дополнительным материалом к урокам геометрии, а теорию доказательства формул «пифагоровых троек» — в курсе алгебры на элективном курсе «Пифагоровы тройки». Для того, чтобы освоить метод построения прямого угла на практике, можно школьникам дать простую верёвочку, и пусть попробуют это сделать.