МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ УДВОЕННОЙ И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ УРОВНЕЙ АЛЬТЕРНАТИВЫ

А.А. Захаров

В работах В.С. Аванесова, где были изложены научные принципы и методические правила разработки заданий в тестовой форме, особо отмечалась привлекательность формирования заданий по принципу «удвоенной альтернативы», когда в каждом ответе присутствуют два элемента (понятия, события, устройства), последовательно противопоставляющиеся друг другу [1–4].

Такие композиции тестовых заданий формируются по принципу определённого соотнесения событий в системе «истинность-ложность» по наличию или отсутствию выбранного признака через оценку «да — нет», 1–0.

Принцип «удвоенной альтернативы» (или принцип рассечения) хорошо согласуется с принципом двузначности, который фактически имеет тесную связь с законом исключённого третьего [5], когда для выбранного утверждения А имеются лишь две возможности:

А истинно или А ложно.

При использовании принципа рассечения, для которого в отношении двух утверждений А и В вероятны оба состояния (признаки) как ложно, так и истинно, получаются четыре возможности или исхода:

1) А и В оба истинны.
2) А истинно, В ложно.
3) А ложно, В истинно.
4) А и В оба ложны.

При произвольном числе событий n и признаков k, каждый из которых характеризует конкретные события, общее число возможных исходов S_j определяется в соответствии с соотношениями комбинаторики. Кроме того, наличие произвольного числа признаков и событий позволяет рассматривать систему исходов как элементы экспертных систем или систем распознавания образов при использовании соответствующего количества множеств признаков или множеств событий.

Среди известных форм закрытых тестовых заданий на выбор правильного ответа, на установление последовательности и на соответствие, а также открытых тестовых заданий наибольшими возможностями обладают тестовые задания на соответствие, которые могут создаваться путём интегрирования простейших тестовых заданий (например на выбор правильного ответа) и разлагаться на простейшие тестовые задания [6]. Такие тестовые задания фактически являются обобщённой формой всех форм тестовых заданий. Тестовые задания на соответствие могут иметь симметричную форму, когда количество элементов i в множестве a и количество элементов j в множестве $б$ в тестовом задании одинаково $i = j$, если задание представить в матричной форме $(a_j\ б_j)$.

Используется и несимметричная форма названных тестовых заданий, когда $i = j$, причём возможны оба варианта $i > j$ и $i < j$, что вполне допустимо, поскольку происходит простая инверсия тестового задания (множества меняются местами).

Если первичную форму тестового задания на соответствие назвать прямой, то при изменении расположения множеств такое задание можно назвать зеркальным.

Для определения количественных и структурных характеристик тестовых заданий в виде заданий на соответствие целесообразно использовать биноминальные коэффициенты, которые вычисляются для всех целых неотрицательных чисел n, k через функцию $C_n{}^k$ (или (n_k)):

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{для } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{для } \quad 0 \le n \le k. \end{cases}$$

Значения биноминальных коэффициентов $C_n{}^k$ могут быть последовательно найдены из известного треугольника Паскаля:

n	C_n^k	Σ
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	512
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	1024

В графе Σ приведены данные об общем количестве исходов в предположении, что величина биномиального коэффициента отражает возможные вариации в системе события – признаки, как будет показано в дальнейшем.

Каждая ячейка треугольника Паскаля представляет собой сумму двух стоящих над ним (справа и слева) биномиальных коэффициентов, то есть в каждой строке слева направо стоят значения $C_n{}^0$, $C_n{}^1$, $C_n{}^2$, ... $C_n{}^{\mathrm{n}}$, а остальные равны нулю.

Ограничения, которые изложены выше для коэффициентов n и k, снимаются, если использовать формулу бинома Ньютона, когда для всех действительных чисел a и b, в, отличных от нуля, и для всех натуральных чисел n применяется соотношение

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n b^0 + C_T^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

где $C_n{}^0 = C_n{}^n = 1$, $a_0 = b_0 = 1$, что и отражено в треугольнике Паскаля, т.е.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b +$$

$$+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n.$$

Это уравнение при $n = 2$ сводится к $a_2 + 2ab + b_2$ с биноминальными коэффициентами, которые находятся во второй строке (1, 2, 1) треугольника Паскаля.

При $b = 0$ и произвольном a получаем соотношение a_n, которое можно использовать для вычисления числа исходов, то есть вариаций тестовых заданий, когда под a подразумевается число признаков, а n – число событий (то есть в случае многомерной альтернативы).

Пусть a и b характеризуют наличие признаков типа a и типа b, причём величина a и величина b указывают на количество признаков, которые характеризуют все события n. В этом случае величина степенного показателя в a^{n-1} определяет число событий, характеризуемых признаком a, то есть при $n = 10$ это будет соответствовать $n - 1$ повторений признака a (9 событий), следовательно, признак b будет соответствовать только одному событию, и с учётом перестановок признака b по событиям получаем 10 исходов.

Допустим, что в качестве признаков используются числовые значения 1, 0, то есть сумма $a + b = 2$, следовательно, общее число исходов составляет 1024. При этом в треугольнике Паскаля крайние единицы означают, что все десять событий характеризуются признаками «0» или признаками «1».

Вернёмся к анализу соотношения $(a + b)^n$.

Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$. Как уже отмечалось, a и b определяют количество существующих признаков, следовательно, если $a = 2$, то это означает, что могут быть признаки типа да-нет, дада, нет-нет и в общем случае x, y.

По аналогии при $b = 1$ существует только один признак типа z. Поэтому,

$$(a+b)^n = \left[(x+y)+z\right]^n$$

и, обозначив $(x + y)$ через γ, получаем $(a + b)^n = [\gamma + z]^n$.

Пусть $n = 2$, тогда

$$\left[\gamma + z\right]^2 = C_2^0 \gamma^2 z^0 +$$

$$+ C_2^1 \gamma z^1 + C_2^0 \gamma^0 z^2$$

и учитывая, что z определяет один признак также, как и x и y, то $\gamma^2 = (x + y)^2 = C_2{}^0 x^2 y^0 + C_2{}^1 x^1 y^1 + C_2{}^2 x^0 y^2$ и окончательно

$$(x+y+z)^2 = C_2^0(C_2^0 x^2 y^0 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2) + C_2^1 (x+y) z^1 + C_2^0 (x+y)^0 z^2 = 1(1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2) + 2(x^1+y^1)z^1 + 1z^2 = x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 + 2x^1z^1 + 2y^1z^1 + z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2.$$

В полученном выражении 6 слагаемых, сумма коэффициентов при которых равна 9. Это означает, что у нас 9 исходов для 2-х событий А и В типа:

А	x	x	y	y	x	z	y	z	z
Б	x	y	x	y	z	x	z	y	z

или, когда $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$:

А	0	0	1	1	0	2	1	2	2
Б	0	1	0	1	2	0	2	1	2

При $n = 3$ и $a + b = 3$ в общем случае получаем $3^3 = 27$ исходов.

Исследуем их количество и структуру. При заданных числовых параметрах $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Пусть $a = 2$, $b = 1$, $a = x + y$, $b = z$, тогда $a^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

С учётом того, что $a^2 = x^2 + 2xy + y^3$, $ab^2 = z^2$ получаем

$$(a+b)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy + y^3 + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz.$$

Последнее уравнение содержит 10 слагаемых, которые будем считать структурами, причём сумма коэффициентов перед слагаемыми равна 27, что соответствует числу возможных исходов.

Слагаемые x^3, y^3, z^3 определяют для трёх событий исходы типа

x y z
x y z
x y z,

или, что то же самое, если представить признаки x, y, z через 0, 1, 2:

0 1 2
0 1 2
0 1 2

Степенные коэффициенты признаков x, y, z определяют их количество в конкретных структурах, а биноминальные коэффициенты – общее число таких исходов. Поэтому слагаемые типа $3x^2y$, $3xy^2$, $3x^2z$, $3y^2z$, $3xz^2$, $3yz^2$ соответствуют исходам

$$\begin{vmatrix} 0\,0\,1 & 0\,1\,1 & 0\,0\,2 \\ 0\,1\,0 & 1\,0\,1 & 0\,2\,0 \\ 1\,0\,0 & 1\,1\,0 & 2\,0\,0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1\,1\,2 & 0\,2\,2 & 1\,2\,2 \\ 1\,2\,1 & 2\,0\,2 & 2\,1\,2 \\ 2\,1\,1 & 2\,2\,0 & 2\,2\,1 \end{vmatrix}$$

Общее число таких исходов равно $6 \times 3 = 18$.

Остаётся 6 исходов, определяемых слагаемым 6 xyz:

$$\begin{vmatrix} 0\,2\,1\,0\,2\,1 \\ 1\,0\,2\,2\,1\,0 \\ 2\,1\,0\,1\,0\,2 \end{vmatrix}$$

Суммарное количество исходов для любого случая, как уже отмечалось, определяется соотношением

$(a + b)^n = k^n$,

где k — число признаков, а n — число событий.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть степенной показатель $n = 3$ означает наличие трёх событий (устройств, приборов, элементов и т.д.). В частном случае в качестве событий будем рассматривать химические материалы, используемые в полупроводниковой технике: алюминий Al , кремний Si и арсенид галлия $GaAs$, п под признаками будем считать их валентности 3, 4, 5 соответственно. При этом матричная часть тестового задания на соответствие на основании вышеизложенного будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{cc} a)\,\text{множество} & б)\,\text{множество} \\ \text{полупроводниковых} & \text{признаков} \\ \text{материалов} & \text{валентности} \\ Al & 3 \\ Si & 4 \\ GoAs & 5 \end{array} \right\}$$

В условиях жёсткого соответствия элементов двух множеств количество правильных вариантов соответствий (исходов) будет определяться последним слагаемым в разложении, т.е. $6\,xyz$.

Коэффициент 6 определяет число возможных вариантов ответов (исходов), причём только один из них будет правильным $Al - 3$, $Si - 4$, $GaAs - 5$, или в обще виде: $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, $a_3 - b_3$.

Если требование жёсткого соответствия отсутствует, то испытуемый может записать любой из приведённых вариантов ответов, структурно и количественно описываемых соответствующими слагаемыми.

Например, при ответе типа $Al - 3$, $Si - 3$, $GaAs - 3$ испытуемый предполагает, что все материалы имеют одинаковую валентность, равную трём, этому соответствует слагаемой x^3 в приведённом разложении, т.е. признак x (валентность, равную 3), по мнению испытуемого, имеют все три полупроводниковые материала.

По аналогии, ответ испытуемого в виде Al – 3, $Si - 3$ и $GaAs = 5$ соответствует слагаемому x^2z с тремя вариантами исходов:

0 0 2
0 2 0
2 0 0,

из которых только первый правильный.

Общее количество исходов равно 27. Это значение вычислено как сумма коэффициентов перед всеми слагаемыми разложения.

С учётом приведённого анализа случай для двух признаков и 10 событий может быть расписан в виде:

$$(x + y)^{10} = x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 = 210x^6y^4 + 252x^5y^5 + 210x^4y^6 + 120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10}.$$

Поскольку $x - 1$ и $y - 1$ в рассматриваемой системе означают «1», «0», следовательно первое и последнее слагаемые соответствуют тому, что события являются ложными «0» или истинными «1».

Пусть события характеризуются таким образом, что девять из них соответствуют признаку 0, а одно событие — признаку 1. Тогда, используя формулу,

$$C_n^m = (m_n) = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

получим только 10 возможных исходов, то есть 10 видов тестовых заданий в которых признак «1» перемещается от первого, например, события до 10 или наоборот, то есть фактически структура тестового задания остаётся неизменной, а число вариаций поиска правильного соответствия конкретного (одного из десяти) события признаку «1» остаётся равным 10 (табл. 5).

Совершенно другая ситуация возникает в случае, когда 10 событий неявно определяются признаками «0» и «1», то есть мы не знаем, какое количество событий характеризуется признаком «0» и какое признаком «1». В соответствии с треугольником Паскаля число комбинаций возрастает до 1024, что характеризует высокие тестовые возможности такого рода форм заданий, которые мы назвали несимметричными (в качестве событий – 10 элементов, в множестве признаков – 2 элемента). Такое положение, например. возникает, когда множество событий включает в себя в качестве элементов характеристики различных устройств сверхвысоких частот, связанных с понятием «линейный и нелинейный режим работы».

Если принять в этом варианте, что только 3 события характеризуют линейный режим, 7 — нелинейный, то число возможных вариантов правильных и неправильных соотнесений достигает 120, и, учитывая симметрию соотншений $C_{10}{}^3 = C_{10}{}^7$, получаем ещё 120 вариантов, из которых только одно может быть абсолютно правильным.

Следовательно, число вариантов, равное 120, в практическом плане невозможно, а сопровождение правильного ответа только тремя дистракторами (при 4-х вариантах ответа, как рекомендуется в традиционной практике) приведёт к тому, что вероятность угадывания существенно возрастёт и достигнет 25%.

Нормальный выход из сложившейся ситуации заключается в формировании параллельных тестовых заданий) в том числе и ложных, когда абсолютно правильный ответ отсутствует. Достаточно представить 10 параллельных тестовых заданий. чтобы снизить вероятность угадывания до 2,5%, что уже вполне допустимо, поскольку такие значения находятся на уровне точности измерений.

При интенсивном использовании параллельных тестовых заданий нет смысла переходить к трёхпараметрической модели в теории современных тестов.

Превращение тестового задания в экспертную композицию происходит при наличии в структуре тестового задания более двух множеств.

В этом случае получается аналогичная рассматриваемым совокупность исходов, которые характеризуют выбранные события относительно системы новых признаков.

Правильно выбранные признаки в различных множествах позволяют идентифицировать событие, то есть распознать его образ.

Предложенный в статье подход позволяет определить структурные и количественные параметры произвольных форм тестовых заданий, обобщённой формой которых являются тестовые задания на соответствие. Использование Бинома Ньютона или полиномиальных коэффициентов является основой создания обобщённой теории форм тестовых заданий, элементы которой изложены в предлагаемом материале статьи.

Литература

1. *Аванесов В.С.* Композиция тестовых заданий. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Адепт. 1998. 217 с.
2. *Аванесов В.С.* Научные основы тестового контроля знаний. М.: Исслед. центр проблем качества подготовки специалистов. 1995. 115 с.
3. *Аванесов В.С.* Теоретические основы разработки заданий в тестовой форме: Пособие для проф.-преп. состава высш. школы. М.: Наука, 1995. 95 с.
4. *Аванесов В.С.* Тесты в социологическом исследовании. М: Наука, 1982. 180 с.
5. Философия. Логика. Язык/ Пер. с англ. и нем.; Сост. и предисл. В.В. Петрова; Общ. ред. Д.П. Горского и В.В. Петрова. М: Прогресс, 1987. 336 с.
6. *Захаров А.Л.* Матричные композиции тестовых заданий как основа гомогенных педагогических тестов различной формы //Актуальные вопросы научных исследований. Теория и практика управления: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. Саратов: Изд-во Сарат. педаг. ин-та, 1997. С. 32–35.