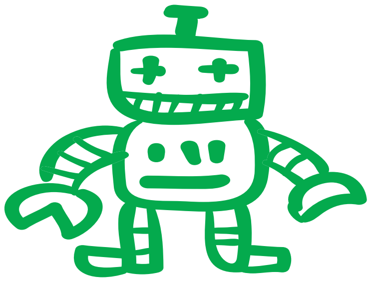
Комбинаторная геометрия в детском саду как средство развития пространственного воображения



Арест М.,
педагог, Израиль

1. Анализ ситуации

Каждый помнит, что в старших классах при изучении стереометрии (измерения в пространстве) учительница математики приносила в класс геометрические тела: многогранники и круглые тела.

В курсе стереометрии ученикам ставились следующие задачи:

Задача 1. Расчёт величин площадей поверхностей и объёмов в пространственных геометрических фигурах.

Задача 2. Построение сечений с помощью секущих плоскостей и решение разных задач, связанных с этими сечениями.

Задача 3. Построение различных комбинаций из геометрических тел: одни многогранники вписаны в другие, одни круглые тела вписаны в другие, круглые тела вписаны в многогранники и так далее.

При решении этих задач преподаватели сталкиваются со следующими трудностями:

1. Как с помощью нарисованной плоской геометрической фигуры увидеть в ней пространственную геометрическую фигуру?

2. Как провести секущую плоскость, проходящую через заданные точки, и после этого увидеть сечение?

3. Как увидеть комбинацию геометрических тел?

Все эти трудности появлялись потому, что в программе обучения не заложено развитие пространственного воображения (и эта ситуация продолжается по традиции!).

В самом деле при решении задач, связанных с плоской геометрией, не формируется пространственное воображение. Что же касается геометрических тел, то последнее воспоминание с ними было связано со строительными конструкторами, в которых указанные геометрические тела рассматривались как строительный материал, но не как геометрическое тело.

Происходило так потому, что те, кто занимался математическим образованием воспитанников детского сада, никогда не руководствовались в своей работе высказыванием Ф. Энгельса [1] о том, что пространственные материальные формы и количественные отношения между ними составляют основу математики. Все знали, что изучение математики начинается с применения математической символики, а тот уровень познания, о котором говорил Ф. Энгельс, относился к сенсорному познавательному уровню, которым серьёзно никто не занимался.

Вполне возможно, что древние изучали математику на сенсорном уровне, но история развития математического знания не сохранила об этом следов. Почему же именно сегодня понадобилось вернуться к сенсорному познавательному уровню? Какова особенность сегодняшнего подхода к математическому образованию?

2. Особенность сенсорного познания математики и роль в таком познании пространственных материальных тел

В настоящее время всё больше начинаем понимать важнейшее значение раннего развития и его влияние на более поздние этапы развития. Зная, что математическое образование принципиально строится лишь на символическом познавательном уровне, некоторые из разработчиков («Стосчёт» Н. Зайцева, карточки с точками и цифрами Домана) пытаются распространить символический уровень на раннее развитие.

Понятно, что системно это сделать не удаётся: попробуйте символически объяснить алгебру и геометрию, а также основы анализа в раннем развитии? Поэтому разработчики пытаются перенести часть программы начальной школы в детский сад. Такой перенос имеет фрагментарное значение.

Казалось бы, мы имеем дело с пропедевтикой основных математических понятий, которые готовят ребёнка к пониманию математики в начальной школе. На самом деле это далеко не так: переступая через сенсорный уровень познания, мы форсируем переход на абстракцию и при этом теряем образность на простейшем уровне — на материальном образе.

С другой стороны, непрерывное математическое образование настойчиво требует изменить подход к познавательному развитию. Это означает смену концепции в познавательном развитии. Если до сих пор источник такого развития находился вне ребёнка и таким источником были родители, воспитатели детского сада, учителя, то новая концепция требует, чтобы теперь сам ребёнок был собственным источником познавательного развития. Именно об этой концепции писал В. Ленин [2].

Таким образом, в новой концепции нужно создать такую обстановку, чтобы ребёнок самостоятельно познавал, начиная с ощущений. Мы видим, что сенсорное познание приобретает актуальность именно при переходе ко второй концепции развития. В этом случае процесс познания движется по пространственной спирали: сенсорное познание — образное познание — символическое познание — понятийное познание.

В этом случае мы выходим за границы символического познания и обнаруживаем познавательные уровни, не только предшествующие ему, но и последующие за ним.

Сегодня именно такой системный подход приобретает большую актуальность. В самом деле именно при таком подходе мы обнаруживаем системность в процессе познания, а потому способны не только отследить уже разработанное, но и спрогнозировать то, что пока ещё неизвестно.

Такое рассмотрение требует более вдумчивого отношения к детскому саду. В результате рассмотрения мы получаем, что математическое образование детского сада является не дошкольным, а базовым. Поэтому вместо привычного термина «дошкольное образование» автор употребляет термин «школа начального развития», введённый к.п.н. Т. Акбашевым.

Осмыслив значимость пространственных материальных форм, перейдём к операциям с ними. При этом откроются такие факты, которые становятся настоящими открытиями.

3. Две диалектически противоположные операции, производимые с пространственными материальными формами

Такими операциями являются операция соединения (склеивания) и операция разделения (рассечения). Как и следует ожидать, от склеивания рассечённого мы получим новое качество: новые формы пространственных материальных тел. Происходит это потому, что интегрирование дифференциального всегда приводит к новому качеству (математика в построении нового качества).

1. Операции с кубом.

Кубом мы назовём обычный куб с длиной ребра не меньше 3 см. Поставим задачу: построить куб с помощью соединений двух одинаковых между собой фигур. Как и следовало ожидать, мы получаем новые фигуры: прямоугольный параллелепипед и треугольную призму, в основании которой находится прямоугольный равнобедренный треугольник.

Поставим новую задачу: построить куб соединением трёх одинаковых пространственных тел. В этом случае мы получим весьма специфическую четырёхугольную пирамиду. Мы видим, что величина пирамиды составляет треть от величины куба. Впервые такую пирамиду по заказу автора получил его сын-программист Марк Арест. Насколько известно автору: такая пирамида, как деталь конструктора, никем не производилась.

Можно поставить задачу о разрезании куба на большее число одинаковых частей. Возможность и невозможность в решении такой задачи будет развивать пространственное воображение детей в раннем развитии.

Займёмся теперь соединением разных фигур. Мы увидим, что в таких комбинациях ребёнок в детском саду обнаруживает связь между многогранниками и круглыми телами с помощью движения.

4. От многоугольной пирамиды к цилиндру, от многоугольной пирамиды к конусу

Мы начнём с конструирования призм, в основании которых находится правильный многоугольник, используя при этом призмы, в основании которых находится равнобедренный треугольник с меняющимся углом при вершине, но постоянными боковыми сторонами.

1. Первая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из трёх таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный треугольник со стороной 8,7 см.

2. Вторая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 90° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из четырёх таких призм составляется призма, в основании которой находится квадрат со стороной 7,1 см.

3. Третья треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 72° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из пяти таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный пятиугольник со стороной 5,9 см.

4. Четвёртая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 60° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из шести таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный шестиугольник со стороной 5 см.

5. Пятая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 45° при вершине и с боковыми сторонами см. Из восьми таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный восьмиугольник со стороной 3,8 см.

6. Шестая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 40° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из девяти таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный девятиугольник со стороной 3,4 см.

7. Седьмая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из десяти таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный десятиугольник со стороной 3,1 см.

8. Восьмая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из двенадцати таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный двенадцатиугольник со стороной 2,6 см.

Теперь перейдём к построению многоугольных пирамид из треугольных пирамид, основание которых также составляет равнобедренный треугольник с меняющимся углом при вершине, но постоянными боковыми сторонами.

1. Первая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 122° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из трёх таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный треугольник со стороной 8,7 см.

2. Вторая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2 в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 90° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из четырёх таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится квадрат со стороной 7,1 см.

3. Третья треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 72° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из пяти таких призм составляется призма, в основании которой находится правильный пятиугольник со стороной 5,9 см.

4. Четвёртая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 60° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из шести таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный шестиугольник со стороной 5 см.

5. Пятая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 45° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из восьми таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный восьмиугольник со стороной 3,8 см.

6. Шестая треугольная призма представляет призму высотой 10 см, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 40° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из девяти таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный девятиугольник со стороной 3,4 см.

7. Седьмая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из десяти таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный десятиугольник со стороной 3,1 см.

8. Восьмая треугольная пирамида представляет пирамиду высотой 10 см и боковым ребром 11,2, в основании которой находится равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине и с боковыми сторонами 5 см. Из двенадцати таких пирамид составляется пирамида, в основании которой находится правильный двенадцатиугольник со стороной 2,6 см.

Теперь поговорим о пропедевтической ценности подобных конструкторов.

5. Пропедевтическое значение конструкторов

Прежде всего укажем на связь призм и цилиндра, пирамид и конуса. В этой связи многоугольная призма постепенно переходит в цилиндр, а многоугольная пирамида постепенно переходит в конус. В таком движении становится понятным, что угольность является мерой сложности: чем больше угольность — тем сложнее призма и пирамида.

Мы видим, что мера гладкости (антиугольность) измеряется угольностью. Если количество углов выражает шаг продвижения призмы к цилиндру и пирамиды к конусу, то такая постепенность является пропедевтиком к пониманию производной. Таким образом, указанные пространственные тела подводят детей детского сада к основному понятию анализа — понятию производной.

Кроме того, конструктор позволяет определить количественные отношения между величинами разных углов. Нахождение такой связи становится пропедевтикой к пониманию тригонометрии. Конструктор знакомит детей с основными представителями большого тригонометрического круга.

Происходит знакомство детей с правильными многоугольниками, что также является пропедевтикой для понимания планиметрии.

Сделаем теперь выводы из рассмотренного.

Выводы:

1. Предложенные конструкторы позволяют познакомить детей в детском саду с многогранниками, их строением и их связью с круглыми телами.

2. Предложенные конструкторы позволяют уже в детском саду знать величину объёма пирамиды.

3. Предложенные конструкторы являются пропедевтикой к пониманию важнейшего понятия анализа — предела через последовательность геометрических фигур.

Литература:

1. *Энгель Ф.* Диалектика природы, М., Госполитиздат 1953.

2. *Ленин В.И.* К вопросу о диалектике ПСС (5 издание) том 29.