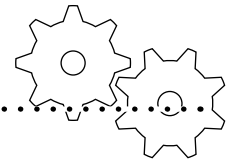


Технология и практика обучения



Л.И. Лапушкина, доцент кафедры прикладной математики СТАНКИНА.

К.Н. Лунгу, профессор кафедры дифференциальных уравнений МГОУ

ПРЕИМУЩЕСТВЕННОСТЬ В ОБУЧЕНИИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Слова «кредит, ипотека, аренда, ставка банка, амортизационные расходы» стали общепотребительными, они встречаются в газетах, звучат по радио и телевидению, фигурируют в рекламах. Между тем не все понимают, что в основе каждой из названных операций лежат школьные понятия процента, арифметической и геометрической прогрессии.

Чтобы студенты экономических специальностей легко усвоили такие дисциплины, как «Финансовые вычисления», «Деньги, кредит, банки», необходимо ещё в школе понимать сущность понятия «процент» и способ его вычисления. Важно также различать и понимать, чем отличаются простые проценты от сложных, как вычисляются те и другие проценты, какова их математическая модель, чем отличается прогрессия геометрическая от арифметической, как определяются их суммы.

Для ликвидации имеющихся пробелов в этом направлении можно организовать несколько повторительных и систематизирующих уроков по соответствующим темам. Основой для решения задач на проценты должны быть три вида задач: нахождение процента данного числа; нахождение числа

по его процентам; нахождение процентного отношения двух чисел¹.

Понимание сущности объекта, явления, процесса и метода означает способность, умение выявлять их признаки и свойства, а также устанавливать их структурные, логические и причинно-следственные связи. Каждая педагогическая проблема, в том числе усвоение и понимание финансовой математики, решается системой соответствующих задач. Ниже приведём весьма сжатый набор типовых задач с экономическим содержанием, который используют авторы статьи в школьной практике.

Основные теоретические сведения, позволяющие решать задачи на проценты, за-

¹ См.: Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Ч. 1. От натуральных чисел и действий с ними до неравенств. М.: Аркти, 2001.

ключаются в нескольких определениях, которые необходимо усвоить через понимание. Эти сведения заключаются в следующем.

Процент — это число. $0,01: 1\% = 0,01$. Процентом чего-либо называется его сотая часть. Процентом числа A называется число $0,01A$. Обозначение $1\% (A) = 0,01A$. Найти p процентов числа A означает найти $0,01pA$. Обозначение $p\%(A) = 0,01pA$. Если p процентов неизвестного числа X равно b , то это число X находится из равенства $0,01pX = b$, т.е. $X = 100 b/p$. Процентным отношением чисел A и B (или B и A) называется отношение A/B (или B/A), выраженное в процентах, т.е. $\frac{A}{B} \cdot 100\%$ (или $\frac{B}{A} \cdot 100\%$).

Усвоить и закрепить эти простые понятия можно при помощи следующих примеров. При этом важно оперировать величиной $0,01p$, т.е. процентами, а не величиной $p/100$, как рекомендуют многие учебники.

Пример 1. 1) Определить, в каких случаях товар стоит дешевле:

- а) если снизить его цену два раза по 10% или один раз на 20%?
- б) если сперва снизить цену на 15%, а затем новую цену повысить на 15%, или первоначальную цену оставить без изменения?
- в) если сперва повысить цену на 25%, а затем новую цену снизить на 25%, или первоначальную цену оставить без изменения?

Пример 2. Цену товара повысили на 10%, затем новую цену повысили ещё на 15%, и, наконец, повысили новую цену ещё на 20%. На сколько процентов в итоге повысили первоначальную цену на товар?

Пример 3. Цена на данный товар в одном магазине равна 16 руб., а в другом — 25 руб. На сколько процентов цена на товар в первом магазине ниже, чем во втором, и на сколько процентов цена во втором магазине выше цены во втором?

Задачи на проценты из разных сфер деятельности и разного уровня сложности можно найти в следующих источниках².

Понимание процентов и действий с ними означает способность и умение видеть через установление связей между числами, фигурирующими в задаче и в её решении, выраженными в терминах «снижение, повышение цены, процент, исходная, промежуточная и конечная цены».

Далее можно переходить к задачам на вычисление долговременных процентов, предварительно описав соответствующие схемы их начисления.

Задача 1. Вкладчик положил в банк A рублей под $p\%$ годовых. Сколько денег будет у него на счету через n лет?

1. Начисление по схеме простых процентов

Схема простых процентов предполагает начисление только на первоначальную сумму A , независимо от срока давности вклада. Это означает, что по истечении одного года начисленные проценты составляют величину

² Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 1. От натуральных чисел и действий с ними до неравенств. М.: Аркти, 2001; Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 1. От неравенств до тригонометрических функций. М.: Аркти, 2001; Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 3. От тригонометрических функций до интеграла. М.: Аркти, 2001.

ну $A \cdot \frac{p}{100}$ (руб.), а величина вклада станет равной $A_1 = A + A \cdot \frac{p}{100} = A \cdot (1 + 0,01p)$ (руб.). По прошествии второго года банк начислит $p\%$ от первоначального вклада A , а не от нового A_1 . И так далее, через n лет величина вклада станет равной $A_n = A \cdot (1 + 0,01p \cdot n)$ (руб.).

Таким образом, схема начисления простых процентов приводит к росту вклада по закону арифметической прогрессии: $A_n = A + n \cdot d$, $d = 0,01p \cdot A$, где d — разность прогрессии.

Примечание. На самом деле начисление по схеме простых процентов имеет место тогда, когда вкладчик по прошествии года снимает начисленные годовые проценты в размере d .

Задача 2. Определить начальную сумму A вклада в банк, чтобы, не трогая его, в конце каждого года снимать со счёта начисленными процентами определённую сумму B , если ставка банка равна $p\%$.

Решение задачи основано на понимании структуры начисленной суммы в конце каждого года, что приводит к определению величины A из равенства $B = d = \frac{A \cdot p}{100}$, т.е. $A = \frac{100 \cdot B}{p}$. Прежде чем действовать в этих условиях, необходимо «чувствовать» это число: например, при ставке банка в 5% вклад должен быть в 20 больше, чем желаемая снимаемая сумма.

Из решения этой задачи можно делать вывод: чтобы получить по начисленным процентам сумму, равную исходному вкладу,

нужно ждать $100/p$ лет, в частности, при $p = 5\%$ срок окупаемости вклада равен 25 лет.

2. Начисление по схеме сложных (повышенных) процентов.

Эта схема означает, что по прошествии второго года банк начисляет $p\%$ имеющейся суммы. Если вкладчик не снимет начисленных процентов, то по прошествии двух лет новая сумма равна $A_2 = A \cdot (1 + 0,01p)^2$, а по прошествии n лет величина вклада станет равной $A_2 = A \cdot (1 + 0,01p)^n$, т.е. она возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1 + 0,01p$.

Задача 3. На сколько лет при схеме сложных процентов нужно положить в банк под $p\%$ некоторую сумму A , чтобы она стала равной B ?

Решение уравнения $B = A \cdot (1 + 0,01p)^n$ относительно n требует логарифмирования

$$\text{этого равенства: } n = \frac{\lg \frac{B}{A}}{\lg(1 + 0,01p)} = \frac{\lg B - \lg A}{\lg q} \text{ (лет).}$$

Отсюда видно, что число лет зависит от p и отношения B/A величин B и A . В частности, при ставке в 5% годовых удвоение вклада произойдёт за

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} = \frac{0,3010}{0,0212} = 14,2 \text{ (лет), а точнее, за 15 лет, поскольку начисления произ-}$$

водятся в конце года.

Задача 4. Какую начальную сумму A следует положить в банк под $p\%$, чтобы при схеме сложных процентов через n лет новая сумма стала равной B ?

Решение получается из равенства

$$B = A \cdot (1 + 0,01p)^n \text{ и } A = B \cdot (1 + 0,01p)^{-n}.$$

В частности, при ставке в 5% и $n = 5$ лет сумму в $B=10\,000$ руб. можно получить, внося сумму $A = 10^4 \cdot (1 + 0,05)^{-5} = 7835$ (руб).

Важная финансовая операция — дисконтирование. Дисконтным множителем называется величина $d_n = \frac{1}{(1+0,01p)^n}$, указывающая на процент текущей стоимости будущей величины начисления.

В условиях предыдущего примера $d_5 = \frac{1}{(1+0,05)^5} = 0,7835$ означает, что первоначальный вклад в 7835 руб. составляет 78,35% от величины начисления через пять лет при банковской ставке 5% годовых.

Таким образом, дисконтирование выражает процедуру определения нынешней стоимости будущего платежа, позволяющий сравнивать величины платежей, осуществляемых в разные моменты времени.

К современному экономическому понятию относится поток платежей и его стоимость. Под потоком платежей понимается постоянная сумма платежей, которая выплачивается за определённый промежуток времени (год, квартал, месяц).

Задача 5. Руководство фирмы решает вложить определённую сумму A (денежных единиц) в строительство данного объекта, который в течение ряда лет будет приносить ежегодный доход B (ден. ед.), выплачиваемый в конце года, причём $B < A$. Банковская ставка равна $p\%$ и она не меняется в течение всего этого срока времени. Определить, при каких условиях выгодно такое вложение.

Решение основано на сравнении с помощью операции дисконтирования сегодняшних затрат A с последующими ежегодными выплатами в сумме B (ден. ед.) в течение n лет.

Первый платёж равен $R_1 = d_1 B$, где $d_1 = (1+0,01p)^{-1}$ фирма получит его через год. Второй платёж, который фирма получит через два года, равен $R_2 = d_2 B$, причём $d_2 = (1+0,01p)^{-2}$. И так далее. Последний платёж, равный $R_n = d_n B$, где $d_n = (1+0,01p)^{-n}$, фирма получит через n лет.

Сумму $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ этих платежей можно вычислить по формуле для суммы геометрической прогрессии (разные задачи на геометрическую прогрессию также можно найти в³). После выполнения ряда действий с рациональными дробями искомая сумма принимает вид

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + \dots + R_n = \\ &= B \cdot \left((1+0,01p)^{-1} + (1+0,01p)^{-2} + \dots + \right. \\ &\left. + (1+0,01p)^{-n} \right) = \frac{100B}{p} (1 - (1+0,01p)^{-n}). \end{aligned}$$

Заметим, что приведение исходного выражения к простому виду и тем более решение последующих неравенств требуют от учащихся определённых вычислительных навыков и умений выполнять знаково-символические преобразования.

Итак, фирме экономически выгодно заключить сделку при условии, $R > A$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{100B}{p} (1 - (1+0,01p)^{-n}) &> A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - (1+0,01p)^{-n} &> \frac{Ap}{100B}. \end{aligned}$$

³ Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 3. От тригонометрических функций до интеграла. М.: Аркти, 2001.

Дальнейшие простые выкладки приводят к неравенству

$$(1 + 0,01p)^n > \frac{100B}{100B - Ap} = 1 + \frac{Ap}{100B - Ap}.$$

Отсюда можно получить сроки, при которых фирме будет выгодно заключить данную сделку:

$$n > \frac{\lg\left(1 + \frac{Ap}{100B - Ap}\right)}{\lg(1 + 0,01p)}, \text{ при } 100B > Ap.$$

Выбор конкретных данных (числовых величин) позволяет понимать, какие связи и соотношения между вкладом A , отдачей B , процентом p и числу n лет являются приемлемыми для осуществления тех или иных бизнес-проектов.

Например, если $A = 100$; $p = 4$; $B = 10$, то последнее неравенство принимает вид $n > \frac{\lg 1,666}{\lg 1,04} = \frac{0,2201}{0,0170} = 12,95$. Это означает, что сделка выгодна только на срок не менее 13 лет.

Приведённые типы профессионально направленных прикладных задач с экономическим содержанием позволяют повысить мотивацию к учёбе будущих студентов-экономистов и легче адаптироваться к введению в вузе других экономических категорий, терминов, характеристик, параметров, критериев.

Поскольку в экономике рассматриваются, помимо банковских и денежных операций, задачи и проблемы регулирования производства, распределения, обеспечения, хранения и т.д., то целесообразно рассматривать задачи на проценты из других областей практики. Задачи совместного производства, коллективной деятельности, на пропорциональные части, движение и пр., включающие в их фабулах и постановках проценты и процентные отношения, будут весьма полезными для формирования вычислительной культуры, математического (логического, алгоритмического, абстрактного) и профессионального (экономического) мышления.