К.Н. Лунгу, *профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного открытого университета*

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Решение задач — важнейшая составная часть обучения математике в вузе и основной вид интеллектуальной деятельности, а научно обоснованный их подбор — один из эффективных путей обновления математического содержания и совершенствования технологии обучения в контексте современных подходов к высшему образованию.

Роль и место задач в обучении математике, а также дидактические и методические их особенности и применения были исследованы в работах многих учёных.

В педагогической психологии учебная задача занимает вторую позицию во внешней структуре учебной деятельности, рассматриваемой как система, состоящая из следующих пяти компонентов: мотивация; учебная задача; учебные действия; контроль, переходящий в самоконтроль; оценка, переходящая в самооценку.

В последние годы, особенно в связи с введением в стране ЕГЭ как универсальной формы контроля школьных знаний выпускников сильно возрос интерес педагогов и методистов к теории педагогических заданий, объединяющей педагогические, метрические, статистические и математические методы исследования. Актуальность такой работы объясняется также и тем, что задания начинают приобретать ведущую роль в организации компьютеризованного процесса образования и самообразования, в самостоятельной работе студентов и дистанционном обучении.

В этой связи считаем важной проблему создания теории и методики измерения педагогических заданий. Иными словами, каждой задаче нужно сопоставить число или арифметический вектор, компоненты которого характеризовали бы те или иные особенности задачи (идейные, структурные, вычислительные, аналитические, технологические, наглядные, вербальные, символические и т.д.). Исходными положениями концепции диагностики задачи являются идея измерения отдельных её параметров (В.П. Беспалько) и системная модель задачи (Ю.М. Колягин). В качестве таких параметров для математической задачи мы предлагаем: информационную ёмкость, логические (системные) связи и трудоёмкость решения задачи.

Основная структурная единица содержания обучения, дидактическая особенность которой состоит в её простоте, законченности и однородности информации, — *учебный элемент* (УЭ). В математике мы имеем дело с учебными элементами четырёх видов:

1) **объекты** (числа, буквы, функции, векторы, матрицы, определители, интегралы, случайные величины);

2) **процессы** (сложение, вычитание, логарифмирование, интегрирование, решение);

3) **явления** (формулы, линии, поверхности, монотонность, выпуклость, сходимость);

4) **методы** (вычисления, построение модели, преобразования, модификация).

Современная наука позволяет говорить о количественных отличиях учебных элементов. Например, исходя из того, что одно слово родного языка несёт информацию примерно в 12 бит (В.П.Беспалько), представляется возможным измерять информационную ёмкость того или иного объекта, определения, утверждения, метода и даже формулы, если они представлены в словесной форме.

Например, сравниваем следующие три определения.

1) Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy с координатами $(\underline{x},y) = (x, f(x)), x\in D(f)$.

2) Система векторов **A**, **B**, ..., **K** называется линейно независимой, если равенство нулю их линейной комбинации $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + ... + \kappa\mathbf{K} = \mathbf{0}$ с произвольными числами возможно только при условии $a = b = ... = \kappa = 0$.

3) Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при всех x таких, что $0 < |x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Очевидно, что информационная ёмкость этих определений разная. В соответствии с этим учебному элементу (понятию, правилу, свойству) приписываем: вес 1, если его описание, определение составляет простое предложение; вес 2, если его описание состоит из двух простых предложений; вес 3, если его определение состоит из не менее трёх простых предложений. Эти веса переносятся на действия, связанные с проверкой соответствующего определения или идентификацией учебного элемента.

Аналогично определяется информационная ёмкость задачи. С этой точки зрения рассмотрим следующие три задачи.

Задача 1. Среди 100 лотерейных билетов есть пять выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу купленных билета выигрышные.

Задача 2. На данной фирме для выполнения двух видов работ нужны 10 специалистов, по пять человек для каждого вида. Сколькими способами можно выбрать группу специалистов для этих работ, если имеется 21 кандидат, причём восемь человек хотят выполнять первую работу, шестеро – вторую, а для семерых безразлично, какую?

Задача 3. На четырёх складах A, B, C, D находится соответственно 32, 30, 18, 20 тонн горючего, а в пунктах 1, 2, 3, 4, 5, и 6 потребляют это горючее в количествах 19, 10, 14, 20, 21 и 26 тонн, соответственно. Перевозка одной тонны горючего со складов A, B, C, D в пункты 1, 2, 3, 4, 5, 6 задаётся следующей тарифной матрицей $T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 9 & 7 & 2 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & 6 & 10 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 5 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут минимальными, и указать эти расходы.

Задачам 1, 2 и 3 сопоставим вес 1, 2 и 3 соответственно.

Обратимся теперь к диагностике логических связей учебных элементов задачи. Рассмотрим конкретные ситуации. При решении систем линейных уравнений можно использовать метод Гаусса (элементарных преобразований), метод Крамера (определителей) и матричный (символический) метод. Эти учебные элементы (вопросы) — элементарные преобразования, определители и матрицы — являются элементами одного раздела «Линейная алгебра». Для приведения уравнений второго порядка к каноническому виду можно использовать метод подстановки как элемент аналитической геометрии или матричный метод как элемент предыдущего раздела, линейной алгебры. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решить методом приведения системы к одному уравнению более высокого порядка (как элемент рассматриваемого раздела) или матричным методом (как элемент далёкого раздела линейной алгебры).

При построении линий уровня функции двух переменных, поля направлений для дифференциальных уравнений используются элементы (уравнения кривых) аналитической геометрии. Таким образом, очевидны задачи, содержащие УЭ одного раздела, соседних или далёких друг от друга разделов, временной лаг между которыми достаточно большой. Задачам этих трёх разных типов (решение линейных систем; приведение уравнения второго порядка к каноническому виду матричным методом; решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами матричным методом) припишем соответственно вес 1, 2 или 3.

Более точная диагностика задачи по этому параметру опирается на выявление логической структуры учебных тем, разделов, дисциплин. При логической структуризации необходимо учесть такие характеристики учебных вопросов как их важность, широта и глубина. Определение логических связей между учебными вопросами при помощи компьютерных программ позволило бы установить достаточно точную диагностику логических связей задачи. Более того, для логической структуры можно ввести более точную, например десятибалльную, шкалу, так или иначе учитывающую фактическое топологическое расстояние между учебными элементами задачи.

На логические связи задачи могут влиять и сами математические объекты, которые фигурируют в задаче. Например, работа с тригонометрическими функциями предполагает умение работать с целыми и дробными выражениями, т.е. логические связи одних элементов опосредованы связями других, для первых связи более разнообразны, чем для вторых. Следовательно, задачам на вычисление пределов

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x}-2}{x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+2e^{2x}+3^x-3}{\ln(1+3x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x+4\cos 2x-7}{\sin x\cdot tg 2x}$

можно сопоставить вес 1, 2 и 3 соответственно.

Трудоёмкость задачи мы определяем по количеству и качеству применяемых действий, необходимых для её решения. Обратимся к примерам.

Задача 4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 + 2x + 4$, проходящей через точку A (1, 5).

Точка A лежит на графике данной функции, поэтому решение задачи можно осуществить стандартным способом двумя простыми действиями, оно занимает мало времени и места.

Задача 5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, проходящей через точку A (2, 4).

Поскольку A (2, 4) не лежит на графике данной функции, то задачу можно называть нестандартной. Для её решения необходимо ввести некоторый параметр, определение которого потребует выполнения дополнительных действий.

Если, например, обозначать через (x_0, y_0) координаты соответствующей точки касания, это позволяет составлять приемлемую модель для их определения, после чего задача сводится к стандартной. Имеем

$$\begin{cases} y_0 = x_0^3 \\ y_0 = k(x_0 - 2) + 4 \Rightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 0 \\ k = 3x_0^2 \end{cases}$$

Простое кубическое уравнение имеет три корня, а потому и задача имеет три решения. Более простая система получилась бы, если вместо кубической брали бы квадратичную функцию. Таким образом, характер системы влияет на характер и объём работы.

Задача 6. Составить уравнения общих касательных к графикам функций

$$y = x^2 + 4x + 9 \quad и \quad y = -x^2 + 2x + 4 .$$

Ясно, что эта задача сложнее, чем предыдущая. Имеет смысл говорить о двух точках касания $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, первая из которых лежит на первой параболе, вторая — на второй. Четыре неизвестные координаты этих точек должны удовлетворять следующей системе из четырёх уравнений (последнее двойное уравнение легко преобразовать в систему):

$$\begin{cases} y_1 = \ x_1^2 + 4x_1 + 9, \\ y_2 = -x_2^2 + 2x_2 + 4, \\ 2x_1 + 4 = -2x_2 + 2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{cases}$$

Необходимость решения такой нелинейной системы указывает, насколько важно, чтобы студенты владели систематизированными знаниями и пониманием знаково-символической деятельности как способность и умение устанавливать связи между учебными элементами, их признаками и свойствами. Эти умения позволяют сравнительно легко привести систему к одному уравнению с одной неизвестной, из которого видно, что задача имеет два решения

$$x_1^2 + x_1 - 6 = 0 , \ x_1 = -3 , \ x_1 = 2.$$

Этим трём задачам сопоставляем вес трудоёмкости решения 1, 2 и 3, соответственно.

Таким образом, предлагаемая методика диагностики задачи по трём параметрам, позволяет строить 27 типов учебных, поисковых, творческих, контрольных заданий разного уровня сложности и трудности.

Такое деление весьма условно, но оно позволяет обосновать оценку в баллах построенной задачи, эта оценка объективна и она принимается студентами. Зная соответствующую диагностику, студенты выбирают для решения подходящие им тип и уровень задач.

Важную роль в решении задач играет свёртываемость действий. Уровень свёртываемости в последние годы, после внедрения ЕГЭ, существенно упал и сейчас находится на катастрофически низком уровне. Студенты первого курса допускают ошибки даже в действиях с целыми числами в пределах первого десятка. Это свидетельствует об актуальности проблемы диагностики школьной математической задачи. Отдельно нужно измерять такие параметры математических действий, как обобщённость, сокращённость и освоенность. Именно эти параметры характеризует понимание действия как умение, способность устанавливать компонентный состав и связи между выявленными компонентами.