**Владимир Дмитриевич Селютин,** *заведующий кафедрой алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета, доктор педагогических наук.*
**Виктор Николаевич Юшин,** *профессор кафедры физики Академии Федеральной службы охраны России, кандидат педагогических наук*

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

***Классическая наука, претендуя на предельную полноту описания явлений, нередко отрывалась от жизни с её гибкостью и неоднозначностью. Бытие человека в мире вещей и явлений представляет закономерный порядок, возникающий из хаоса случайных событий. Этот факт нашёл отражение в современной науке на уровне её глобальных мировоззренческих установок. Произошёл переход к новой картине мира, характеризующейся отказом от детерминизма и абсолютизации, признанием идей самоорганизации, конструктивной роли хаоса. Это послужило основой для формирования вероятностно-синергетической парадигмы, математическим ядром которой является стохастика как комплексное учение о случайностях.***

Уровень образованности выпускника вуза определяется способностью решать проблемы различной сложности на основе имеющихся знаний в состояниях с неоднозначно определёнными условиями. Ведь сама природа содержит сложноорганизованные системы, изучение которых помогает формировать личность, способную принимать решения, действовать в меняющихся условиях.

Быстрый рост научной информации и всё более усиливающаяся интеграция научных исследований ставят проблемы методологического характера, которые необходимо решать в процессе разработки методики обучения соответствующей дисциплины.

В качестве одного из примеров трансформации достижений современной науки в учебные дисциплины рассмотрим элементы методики формирования знаний обучаемых в курсах физики и математики об одном из фундаментальных открытий современной науки — стохастичности динамических систем.

Формирование знаний о стохастичности динамических систем предполагает необходимость введения целого ряда новых понятий: о фазовом пространстве, локальной неустойчивости, эргодичности и перемешивании, критерии стохастичности, странном аттракторе, сценарии перехода к хаосу, фрактальным структурам[1]. Один из возможных вариантов технологии формирования знаний о динами-

[1] *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. / Г. М. Заславский // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

ческом хаосе в вузовском курсе общей физики предложен в работе[2].

Рассмотрим, как в курсах физики и теории вероятностей можно ввести понятие о горизонте предсказуемости поведения нелинейных динамических систем.

Приступая к изложению учебного материала, говорим о том, что до недавнего времени в науке господствовало представление о полной предсказуемости поведения любых динамических систем. Традиционное же представление об областях, где действуют законы статистической физики, заключалось в том, что количество взаимодействующих частиц должно быть достаточно велико (статистические теории Максвелла и Больцмана, радиоактивный распад, шумы в радиоэлектронных устройствах и т. д.) или же на систему действуют случайные силы (броуновское движение). Между тем известно, что в сколь угодно большом числе сложно взаимодействующих частиц хаоса может и не быть и, наоборот, хаос возникает в системе всего лишь из двух связанных нелинейных осцилляторов.

Обращаем внимание на то, что исследования нелинейных динамических систем указывало на ограниченность предсказательных возможностей классической физики. В результате объединённых усилий математиков, физиков и механиков в начале 1970-х годов сформировалось качественно новое представление о характере динамических процессов, о локальной неустойчивости поведения большинства нелинейных физических систем и о роли хаотических и стохастических движений, которые не допускают предсказаний на длительные промежутки времени.

Главная черта хаотических систем в том, что малое возмущение начальных условий для динамической переменной или же малое изменение параметров самой динамической системы приводит к непредсказуемости результирующего поведения за конечное время, которое называют горизонтом предсказуемости.

Ввести понятие о горизонте предсказуемости можно, рассмотрев соотношение между исследуемым, наблюдаемым и модельным процессами[3]. Взаимосвязь между этими процессами показана на рис. 1, на котором: $a(t)$ – реальный процесс (штриховая линия); $b(t)$ — наблюдаемый процесс (жирная линия); $c(t)$ — модельный процесс (тонкая линия). При сравнительно небольших помехах наблюдаемый процесс $b(t)$ слабо отличается от реального процесса $a(t)$ при любых значениях $t$, при которых регистрирующие приборы исправны. В то же время прогноз $c(t)$ близок к $b(t)$ только на ограниченном интервале, который можно назвать временем предсказуемого поведения или, если отождествить предсказуемость с детерминированностью, временем детерминированного поведения $\tau_{\det}$.

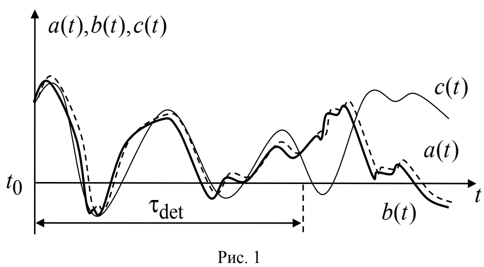


Рис. 1

[2] *Мартынов М.С., Долотин Ю.Г., Юшин В.Н.* Изучение динамического хаоса в общем курсе физики. / М. С. Мартынов, Ю. Г. Долотин, В. Н. Юшин // Физическое образование в вузах. Т. 13, № 3. 2007. С. 83–94.

[3] *Кравцов Ю. А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость. / Ю. А. Кравцов //УФН. Т. 158. В 1. 1989. С. 93–122.

Наиболее распространённой мерой качества прогноза служит средний квадрат ошибки $\sigma^2 = <|b(t) - c(t)|^2>$.

Из начальных условий следует, что дисперсия $\sigma^2$ в начальный момент времени $t = t_0$ равна нулю. На достаточно больших интервалах времени, когда положительные и отрицательные значения произведения $bc$ встречаются одинаково часто, процессы $b(t)$ и $c(t)$ становятся статистически независимыми: $<bc> = 0$, при этом дисперсия выражается через сумму средних квадратов: $\sigma^2 = <b^2> + <c^2>$.

Величину $\varepsilon = \dfrac{<|b-c|^2>}{<b^2> + <c^2>}$ называют относительной ошибкой. При $t \to \infty$ она стремится к 1.

Корреляционная мера качества прогноза вводится как нормированная корреляционная функция: $D(\tau) = \dfrac{<b(t)c(t)>}{\sqrt{<b^2(t)><c^2(t)>}}$,

где $t = t_0 + \tau$.

По модулю $D(\tau)$ всегда меньше единицы. При использовании тождества

$$<bc> = \frac{1}{2}<b^2> + <c^2> - <|b-c|^2>$$

коэффициент корреляции $D(\tau)$ можно выразить через $\sigma^2 = <|b(t) - c(t)|^2>$ и через $\varepsilon$.

$$D(\tau) = \frac{<b^2> + <c^2> - \sigma^2}{2\sqrt{<b^2(t)><c^2(t)>}} = \frac{<b^2> + <c^2>}{2\sqrt{<b^2(t)><c^2(t)>}}(1-\varepsilon)$$

Из последнего выражения следует, что все три величины $\sigma^2$, $D(\tau)$ и $\varepsilon$ в равной степени могут быть использованы для описания качества прогноза. Все эти величины можно определить непосредственно из эксперимента, набрав необходимое количество данных и произведя обычное эмпирическое усреднение.

Качество предсказуемости можно охарактеризовать также функцией концентрации (вероятность попадания $b$ в заданный интервал $\Delta$ возле прогноза $c$).

Коэффициент корреляции между наблюдением и прогнозом может служить характеристикой степени стохастичности или напротив детерминированности наблюдаемого процесса.

На малых временах $\tau$, когда модельный процесс $c(t)$ ещё не сильно отличается от $b(t)$, величина $D$ близка к единице (рис. 2). В этом случае можно говорить о полностью детерминированном поведении процесса $b(t)$ относительно $c(t)$. В противоположность этому при достаточно больших $\tau$ величина $D$ стремится к нулю, что свидетельствует о слабой предсказуемости наблюдаемого процесса $b(t)$ по отношению к модели $c(t)$. На рис. 2 показана зависимость степени детерминированности от времени: *I* — область полностью детерминированного поведения, *II* — область частично детерминированного поведения, *III* — область стохастического поведения.

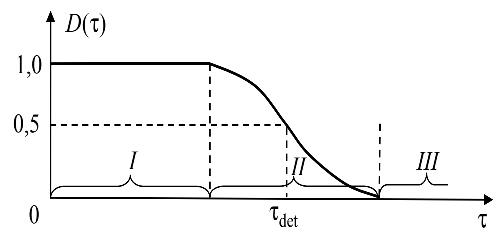


Рис. 2

Время, в течение которого величина $D$ превышает некоторое значение, например

1/2, выступает как время детерминированного поведения.

Наглядным примером, иллюстрирующим приведённые выше рассуждения, может быть рассказ о достоверности публикуемых в средствах массовой информации геомагнитных прогнозах неблагоприятных дней на месяц с точностью до нескольких часов[4]. Специалисты утверждают, что это абсолютно исключено. Специально созданные прогностические центры в профессиональных учреждениях наиболее развитых стран, используя огромный объём данных, а также сиюминутные данные телескопов и спутников, имея оперативную информацию о вспышках и коронарных выбросах на Солнце, могут дать прогноз не более чем на сутки вперёд с коэффициентом корреляции 0,7. На третьи сутки коэффициент корреляции падает до 0,3. Объяснение такого положения с прогнозом следующее. Даже наблюдая выброс плазмы на Солнце, нельзя точно предсказать, попадёт ли он на Землю. Невозможно также точно определить время, за которое плазма достигнет Земли. В лучшем случае прогноз звучит так: «завтра, скорее всего во второй половине суток, возможна буря со средней или выше средней мощностью». Что же касается прогноза на месяц вперёд, то специалисты ориентируются только на так называемую 27-дневную рекурентность, связанную с периодом вращения Солнца вокруг своей оси. Естественно, такой прогноз не может претендовать на высокую точность, поскольку ситуация на Солнце иногда меняется за минуты, а среднее время существования активных центров составляет 6–10 дней. Прогнозы, публикуемые в разных изданиях, содержат грубые ошибки. Они не имеют никакого отношения к прогнозам, которые дают серьёзные научные центры.

При изложении учебного материала важно отметить, что появление стохастичности (хаоса) — внутреннее свойство динамической системы и не связано с действием каких-либо случайных сил. Принципиально важно, что хаос (как внутреннее свойство системы) возникает почти всегда и почти везде. И если мы его не всегда обнаруживаем, то лишь потому, что он либо возникает в очень узкой области параметров, либо проявляется на очень больших временах, либо вуалируется другими, более сильными процессами.

Итак, статистические законы, а вместе с ними и статистическое описание относятся не только к очень сложным системам с большим числом степеней свободы, но и к динамическим системам, у которых при некоторых значениях параметров наблюдается экспоненциальная неустойчивость движения. Поскольку таких систем очень много, то область приложений явления стохастичности оказалась необычайно широкой. Она охватывает практически все основные разделы современной физики.

Таким образом, акцентируя внимание студентов на различных сторонах стохастичности динамических систем, мы добиваемся повышения качества знаний по физике и математике, отражающих удивительно разнообразный и сложный характер чередования динамических и хаотических режимов. А это содействует формированию нового стиля научного мышления — нелинейного мышления, которое является основой универсальной синергетической методологии изучения процессов в сложных системах различной природы.

---

4 *Обридко В. Н.* О так называемых геомагнитных прогнозах неблагоприятных дней / В.Н. Обридко // В защиту науки. Бюл. № 2. М. : Наука, 2007. С. 66–70.