В разделе публикуются исследовательские работы школьников, выполненные в самых разных областях знаний. В журнале представлены исследования участников различных всероссийских конкурсов и конференций.

Гексамино

Бережинская Вероника, Лощилов Роман,
ученики 6-го класса МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 54», г. Кемерово

Научный руководитель:
Бачурина Елена Геннадьевна,
учитель математики МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 54», г. Кемерово

Лучший способ изучить что-либо —
это открыть самому
Д. Пойа

Каждый из нас хотя бы раз в жизни собирал картинку, пазл, мозаику; кто-то пытался собрать из кусочков разбитую вазочку... Собирание из кусочков чего-то целого — очень увлекательный и захватывающий процесс. А если эти кусочки — геометрические фигуры, обладающие определёнными свойствами? Тогда это уже не просто игра, а решение задач на распознавание и построение фигур, разбиение их на части, преобразование в новые фигуры.

Игры-головоломки или геометрические конструкторы известны с древних времён: «Головоломка Пифагора», «Игра Архимеда», «Танграм», разновидности полимино. Но и сегодня они вызывают большой интерес. Ведь такие задания увлекают, заставляют думать, развивают фантазию, активизируют практические действия и, как итог, формируют желание реализовывать собственный замысел.

Играя, фантазируя, исследуя простейшие фигуры, изучая их свойства, понимаешь, что наука математика намного шире того, что нам предлагается на уроках. Начинаешь понимать, как из математических фантазий может появиться новая задача, головоломка или развивающая игра.

Представляем результат наших исследований и фантазий с геометрическими фигурами — практико-ориентированный проект «Гексамино».

Цель работы: исследовать гексамино, рассмотреть задачи игры с гексамино.

Задачи:

- изучить специальную литературу;
- изготовить и исследовать фигуры гексамино;
- представить в работе ряд математических задач;
- создать продукт — игру «Гексамино»;
- продемонстрировать своей работой, что математика очень удивительный и необычный предмет.

Методы исследования: сбор информации, анализ периодической и учебной литературы, точные геометрические расчёты при построении, создание фигур гексамино, выявление свойств этих фигур, конструирование своих моделей, фотосъёмка, конкретизация имеющегося материала с использованием ИКТ.

Объект исследования: гексамино.

Предмет исследования: математические закономерности.

Продукт проекта: игра «Гексамино»:

- игра;

• складывание различных фигур и картинок;

• использование фигур гексамино как дидактический материал.

Что такое гексамино

Полимино использовались в занимательной математике с 1907 года, а известны были ещё в древности. Многие результаты с фигурами, содержащими от 1 до 6 квадратов, были впервые опубликованы в журнале Fairy Chess Review в период с 1937 по 1957 г., под названием «Проблемы рассечения» [3].

Название «полимино», или «полиомино», было придумано Соломоном Голомбом в 1953 году. Голомб определил полимино как «односвязную» фигуру, составленную из квадратов. «Односвязность» фигуры означает, что каждый входящий в неё квадрат имеет по крайней мере одну сторону, общую с другим входящим в неё же квадратом [4].

Полимино — плоские геометрические фигуры, образованные путём соединения по сторонам нескольких равных квадратов. Полимино носят названия по числу квадратов, из которых они состоят: 1 квадрат в мономино; 2 квадрата в домино; 3 квадрата в тримино; 4 квадрата в тетрамино; 5 квадратов в пентамино; 6 квадратов в гексамино; 7 квадратов в гептамино; 8 квадратов в октамино; 9 квадратов в нонамино или эннеомино; 10 квадратов в декамино и т.д.

Гексамино — это полимино 6-го порядка, то есть фигура, состоящая из шести равных квадратов, соединённых сторонами [2].

В 1970-е годы гексамино было популяризировано Мартином Гарднером, американским математиком, писателем. Число различных фигур полимино данного порядка зависит от того, из скольких квадратов составлены фигуры, но ещё никому не удалось найти формулу, выражающую эту связь. Чтобы найти число различных «костей» n-мино высшего порядка, приходится пускаться в утомительные вычисления, и есть надежда, что кому-то в XXI веке удастся найти эту закономерность...

Гексамино и его свойства

Итак, известно, что гексамино (гекса — шесть) — это фигура, состоящая из шести одинаковых квадратов соединённых хотя бы одной стороной. Рассмотрим, какие секреты таят в себе данные фигуры:

«Свободные» и «фиксированные» гексамино. Существует 35 различных форм гексамино (при этом фигуры, совпадающие при поворотах и зеркальных отражениях, не считаются различными). Их принято называть «свободными» гексамино. Если различными считать также повороты, зеркальные отражения, то существует 216 видов гексамино. И тогда речь идёт о «фиксированных» формах гексамино. На рисунке 1 показано, как одно «свободное» гексамино может иметь различные виды «фиксированных» гексамино (рис. 1).

Чётные и нечётные гексамино. Интересен факт разделения гексамино на две группы: чётные и нечётные. Если раскрасим каждую фигуру гексамино по примеру шахматной доски, то количество квадратов каждого цвета будет иметь 3 белых и 3 чёрных квадрата, в этом случае фигуру называют «нечётным гексамино» (рис. 2), а если количество квадратов одного и другого цвета чётно (2 и 4), то «чётное гексамино» (рис. 3). Выделяют 11 фигур «чётных гексамино» (Приложение 1), 24 фигуры «нечётных гексамино» (Приложение 2).

Симметричные и асимметричные гексамино. Исследуем фигуры гексамино на симметричность. 35 свободных фигур

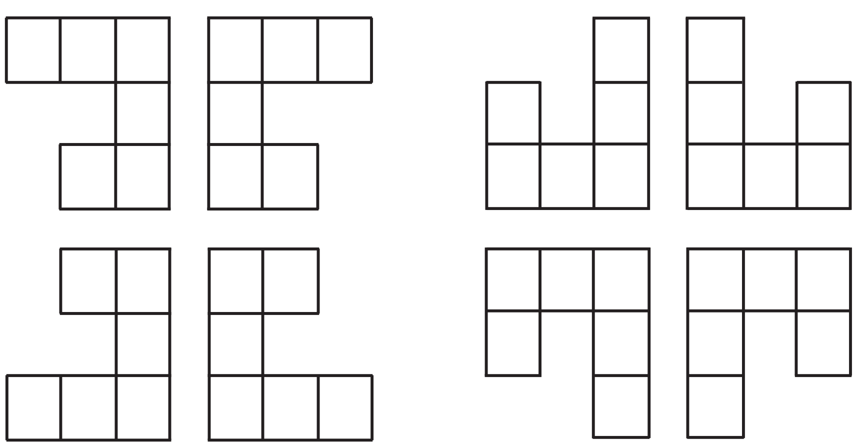


Рис. 1.

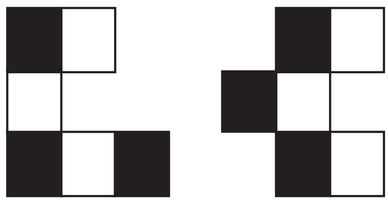


Рис. 2

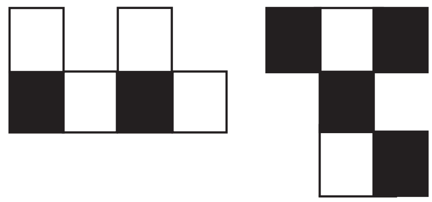


Рис. 3

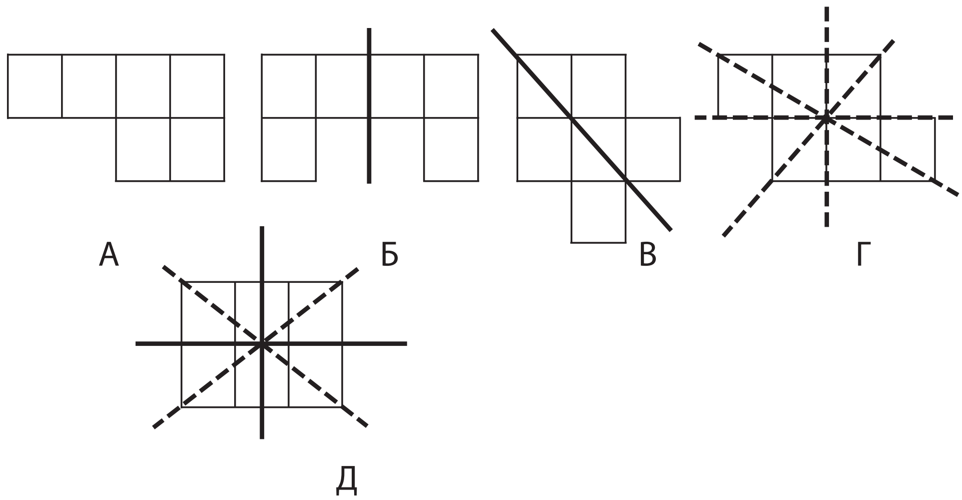


Рис. 4.

гексамино по их свойствам симметрии можно разделить на категории:

- 20 фигур гексамино асимметричны (рис. 4-А);
- 8 фигур гексамино имеют осевую симметрию (рис. 4-Б, В);
- 5 фигур гексамино имеют центральную симметрию (рис. 4-Г);
- 2 фигуры гексамино имеют две симметрии: центральную и осевую (рис. 4-Д).

Подробное распределение фигур по категориям в Приложениях 3, 4.

Площадь фигур. Полный набор из 35 гексамино имеет общую площадь 210 квадратов (35×6), из них невозможно составить какой-либо прямоугольник с такой площадью (3×70, 5×42, 6×35, 7×30, 10×21, 14×15). Доказать это можно, раскрасив гексамино и прямоугольник в шахматном порядке.

Тем не менее есть другие фигуры из 210 квадратов, которые могут быть составлены из «свободных» гексамино. Например, квадрат 15×15 с прямоугольным отверстием 3×5 в центре имеет 106 белых и 104 чёрных квадрата (или наоборот) и может быть составлен из полного набора в 35 гексамино. «Параллелограмм» 15×14 с зубчатыми боковыми сторонами. Прямоугольник 19×11 с одноклеточным выступом. Прямоугольник 13×16 с двумя выступами. «Треугольник» с зубчатой гипотенузой. Прямоугольник 17×15 с крестообразным отверстием (Приложение 5).

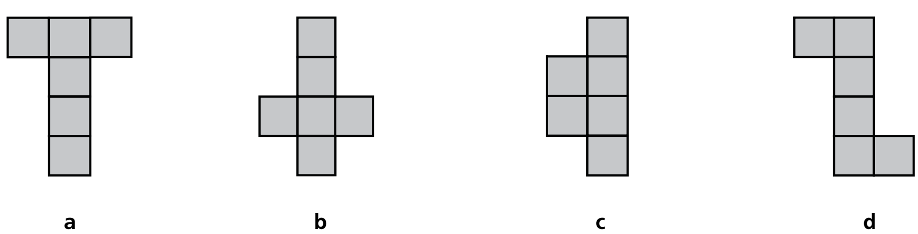
Задачи из гексамино

Задачи из гексамино можно разделить на три типа.

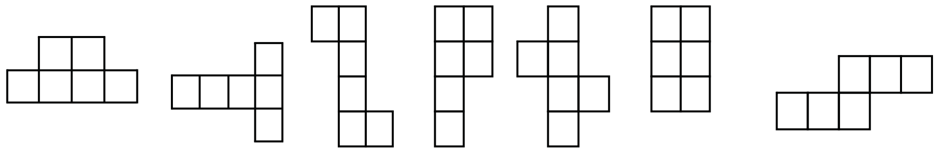
I. Задачи нестандартные, часто используемые на олимпиадах, конкурсах, викторинах. Приведём примеры таких задач.

№ 1. Какие из фигур не могут быть развертками куба? [5].

Ответ: фигура **c**.



a **b** **c** **d**



№ 2. Можно ли сложить прямоугольник 6×7 из нарисованных фигурок? (Каждая фигурка должна быть использована ровно один раз) [1].

Решение: Так как в прямоугольнике 6×7 будет 21 чёрный и 21 белый квадрат, а из предлагаемых фигур 6 нечётных (18 белых, 18 чёрных квадратов) и одна чётная (4 белых, 2 чёрных квадрата). Имеет 20 чёрных и 22 белых квадрата, следовательно, нельзя сложить такой прямоугольник.

Ответ: нельзя.

№ 3. Можно ли сложить из элементов гексамино прямоугольник 3×70? [2]

Решение: Так как «нечётных» элементов гексамино 24 фигуры, то по правилам математики: чётное, умножая на нечётное, равно чётному.

3 (белых) × 24 фигуры = 72 (белых) квадрата.

3 (чёрных) × 24 фигуры = 72 (чёрных) квадрата.

А «чётных» элементов 11 фигур, следовательно: чётное, умножая на нечётное, равно чётному.

2 (белых) × 11 фигур = 22 (белых) квадрата.

4 (чёрных) × 11 фигур = 44 (чёрных) квадрата.

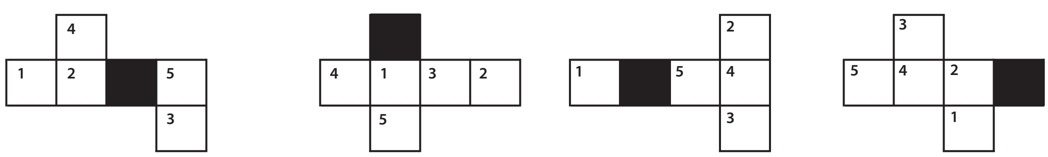
Итого: 72 + 22 = 94 (белых)
72 + 44 = 116 (чёрных).

А в прямоугольнике 3 × 70 = 210 (квадратов) белого и чёрного цвета поровну (по 105). Следовательно, нельзя сложить такой прямоугольник из элементов гексамино.

Ответ: нельзя.

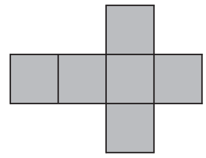
№ 4. Мысленно сверните из фигур гексамино куб и определите, какая грань является верхней, если нижняя грань закрашена? [5].

Ответ: а) 1; б) 5; в) 4; г) 4.



а б в г

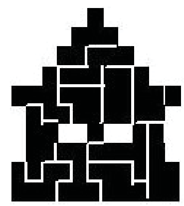
№ 5. Фигура, изображённая на рисунке, составлена из 6 одинаковых квадратиков. Её периметр равен 6 см. Найдите её площадь [5].



Решение: $(6 : 14)^2 \times 6 = \frac{54}{49}$ см².

Ответ: $\frac{54}{49}$ см².

II. Задачи на составление геометрических фигур и картинок из набора «свободных» 35 форм гексамино или из «фиксированных» 216 форм гексамино. (Приложения 5, 7.)



III. Задачи с использованием шахматной доски и фигур гексамино, нужно выложить шахматную доску фигурами гексамино, не оставляя свободных клеток.

Продукт — игра «Гексамино», её применение

Исследовав фигуры гексамино, их свойства, применение, захотелось поиграть в эту замечательную игру. Но оказалось, что ни в магазинах нашего города, ни в интернет-магазинах такой игры нет. Можно в интернет-магазине заказать игру гексамино, но с математической точки зрения — это гексатрион (фигуры из шести правильных треугольников, их всего 12 фигур). Поэтому было решено самим создать данную игру. Вначале были изготовлены фигуры гексамино по размеру обычной шахматной доски, но играть на обычной шахматной доске (размер 8×8) было неинтересно, т.к. поверхность доски быстро заканчивалась, а фигур оставалось ещё много. Поэтому была разработана доска размером 14×15, соответственно размер клетки-квадрата 2 см × 2 см. Площадь данной доски составила 210 квадратов, что равно площади всех 35 фигур гексамино (35×6 = 210 квадратов). Но все фигуры нельзя установить на прямоугольнике 14×15, поэтому нельзя сыграть вничью, всегда будет выигравший.

Игра состоит из доски 14×15, 35 фигур гексамино и инструкции (Приложение 6). Фигуры гексамино имеют двустороннюю окраску, это очень удобно: один игрок может играть гексамино одного цвета, другой — другого. Доска также двусторонняя, на одной стороне квадраты закрашены в шахматном порядке, а другая просто разбита на квадраты (на доске, разбитой на квадраты, оказалось легче собирать различные фигуры). Для инструкции были самостоятельно разработаны картинки, которые предлагаются для сборки из фигур гексамино (Приложение 7). Данная игра прошла апробацию среди учащихся шестых, четвёртых и вторых классов. Все ребята остались довольны. От начальной школы поступил заказ на игру.

Гексамино могут служить дидактическим материалом на уроках математики. При изучении осевой и центральной симметрий в восьмом классе фигуры гексамино были использованы как раздаточный материал для устной работы. При изучении площадей в пятом классе фигуры гексамино можно использовать как раздаточный материал для практической работы. Таким образом, гексамино можно использовать в образовательных целях по следующим темам:

1. «Площадь. Формула площади прямоугольника». Математика, 5 класс, Н.Я. Виленкин и другие, глава 1, §4, п.18;
2. «Площадь прямоугольника». Математика, 5 класс, Г.К. Муравин, О.В. Муравина, глава 2, п.8;
3. «Понятие площади многоугольника». Геометрия, 8 класс, Л.С. Атанасян и другие, Глава 6, §1, п.48;
4. «Осевая и центральная симметрии». Геометрия, 8 класс, Л.С. Атанасян и другие, Глава 5, §3, п.47;
5. «Центральная симметрия». Математика, 6 класс, Г.К. Муравин, О.В. Муравина, глава 3, п.12; «Осевая симметрия». Математика, 6 класс, Г.К. Муравин, О.В. Муравина, глава 4, п.21.

Заключение

Закончен проект, выполнены поставленные задачи, достигнуты намеченные цели. Пройден трудный, но интересный путь. Приятно осознавать, что сделанная работа принесла удовлетворение не только тем, кто работал над ней, но и многим ребятам, для которых знакомство с игрой «Гексамино» стало приятным открытием, а в кабинете появилась новая игра и дидактический материал.

Есть ещё одна положительная сторона: занимаясь проектом, нам пришлось выполнять много измерений, чертежей, построений. Рассматривать задачи на распознание и построение фигур, разбиение их на части, преобразование в новые фигуры. Всё это пригодится в седьмом классе, когда мы начнём изучать геометрию.

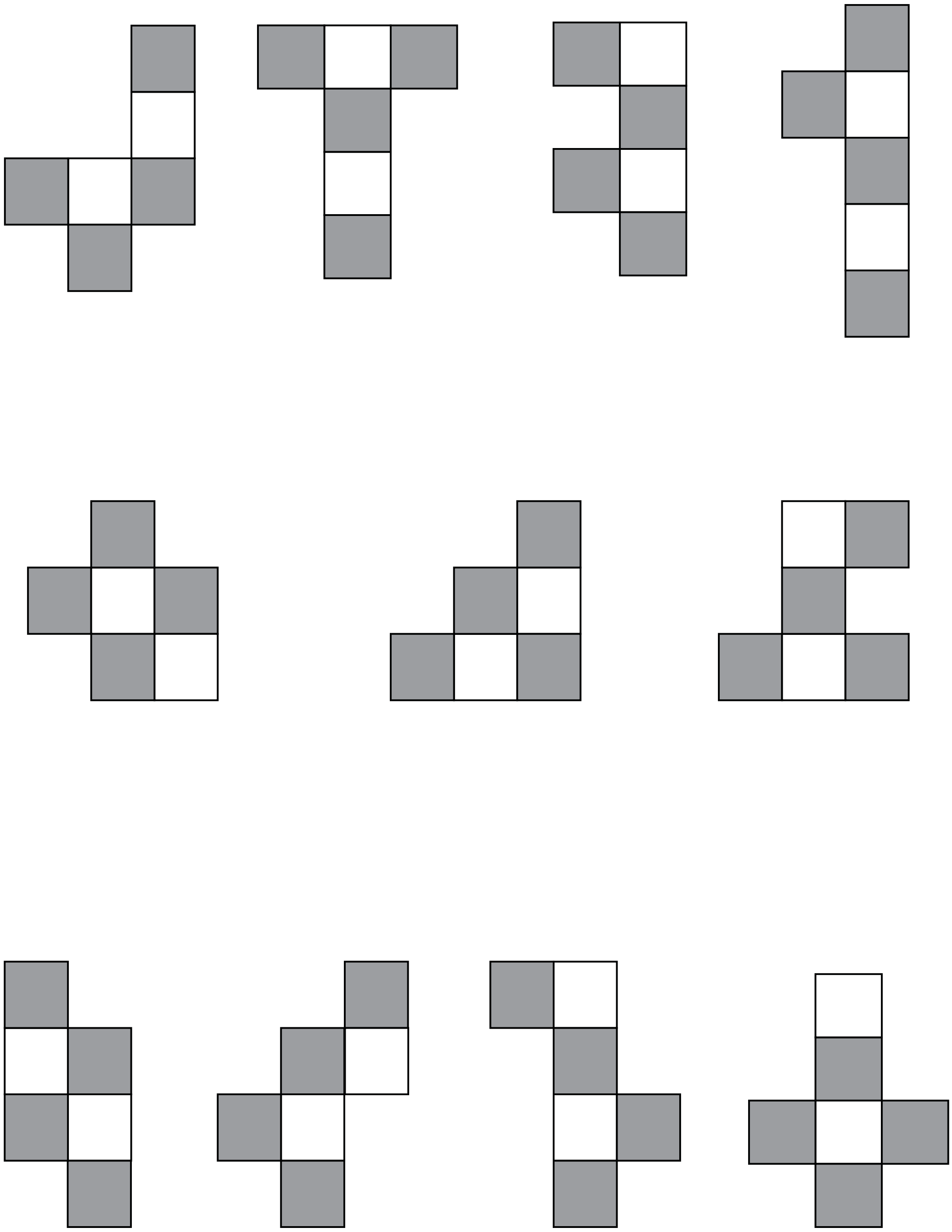
Очень хочется, чтобы такая игра была доступна всем желающим, продавалась в магазинах нашего города. Ведь игра «Гексамино» — это очень полезное занятие для развития смекалки, фантазии, наглядно-образного мышления, воображения, внимания, творческих способностей. Из набора фигур можно построить разные осмысленные схематические фигурки. Дети знакомятся с пропорциями, учатся ассоциировать силуэты с реальными предметами. Из фигур гексамино также можно построить узоры или орнаменты. Кроме работы по инструкции можно фантазировать самостоятельно, изобретая новые контуры знакомых предметов. Интересно, как бывает: заинтересовало слово «гексамино», а в результате появился целый проект! И всё благодаря такой замечательной науке — математике!

Литература

1. Библиотечка клуба «Кенгуру», выпуск № 8, — С-П., 2009. — 27 с.
2. Википедия. http://ru.wikipedia.org/wiki/Гексамино
3. Википедия. http://ru.wikipedia.org/wiki/Полимино
4. Википедия. http://stepanov.lk.net/gardner/hex/hex13.html
5. Все задачи «Кенгуру». — С-П., 2008. — 252 с.
6. *Гарднер* М.М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974. — 456 с.
7. *Голомб С.В.* Полимино. — М.: Мир, 1975. — 207 с.
8. *Муравин Г.К., Муравина О.В.* Математика, 6 класс. — М. Дрофа, 2011. —319 с.

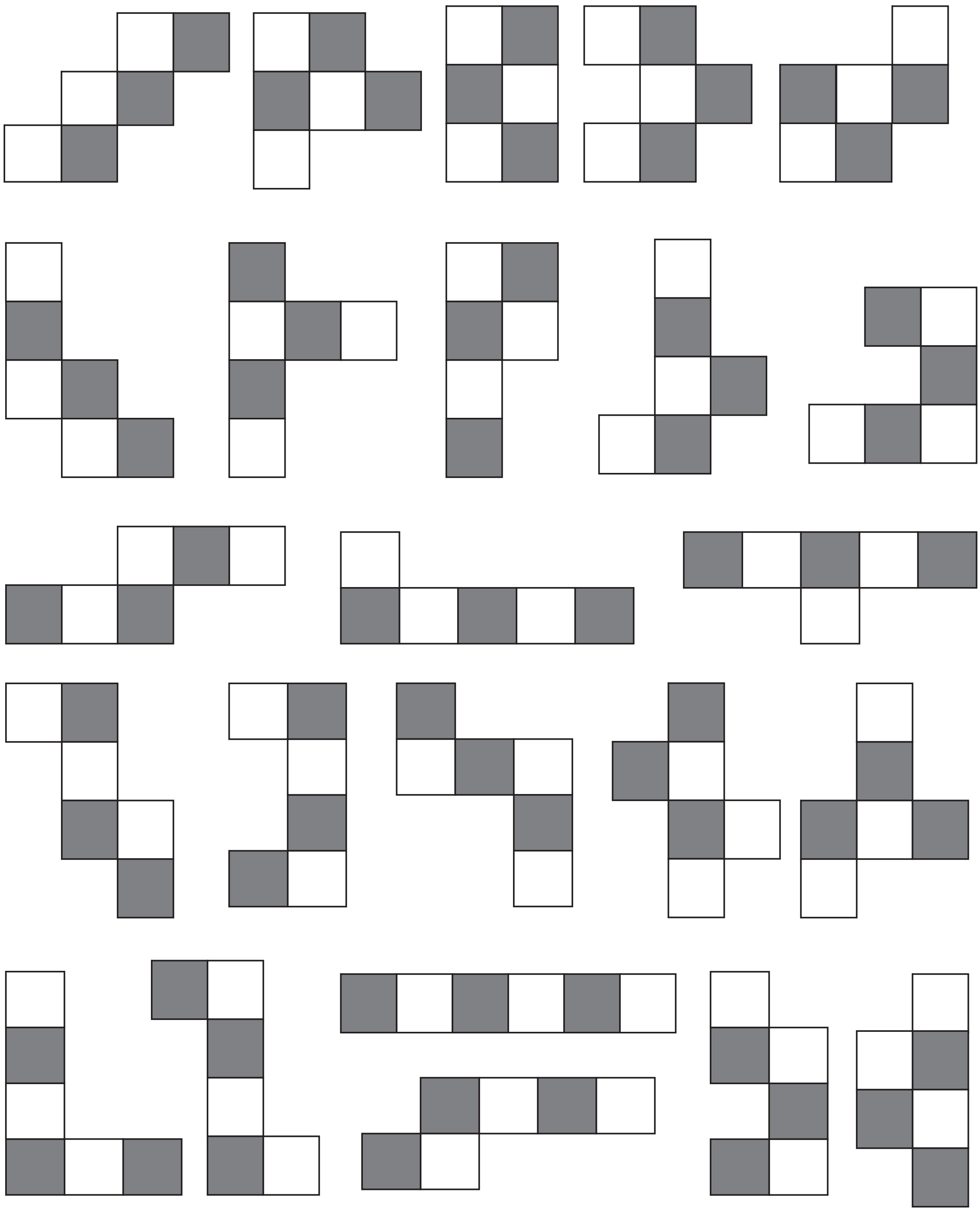
Приложение 1

Чётные гексамино
11 фигур



Приложение 2

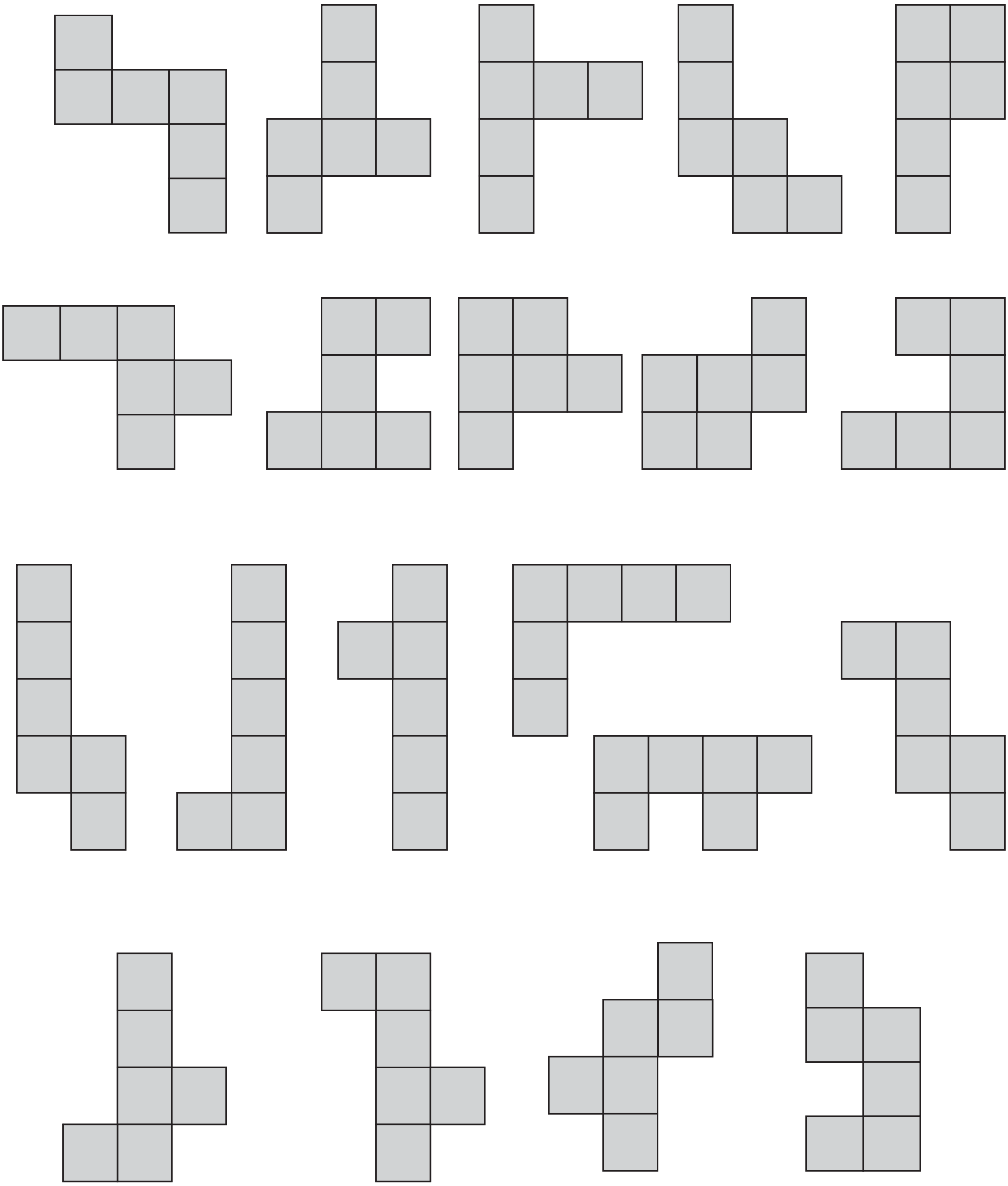
Нечётные гексамино
24 фигуры



Приложение 3

Асимметричные гексамино

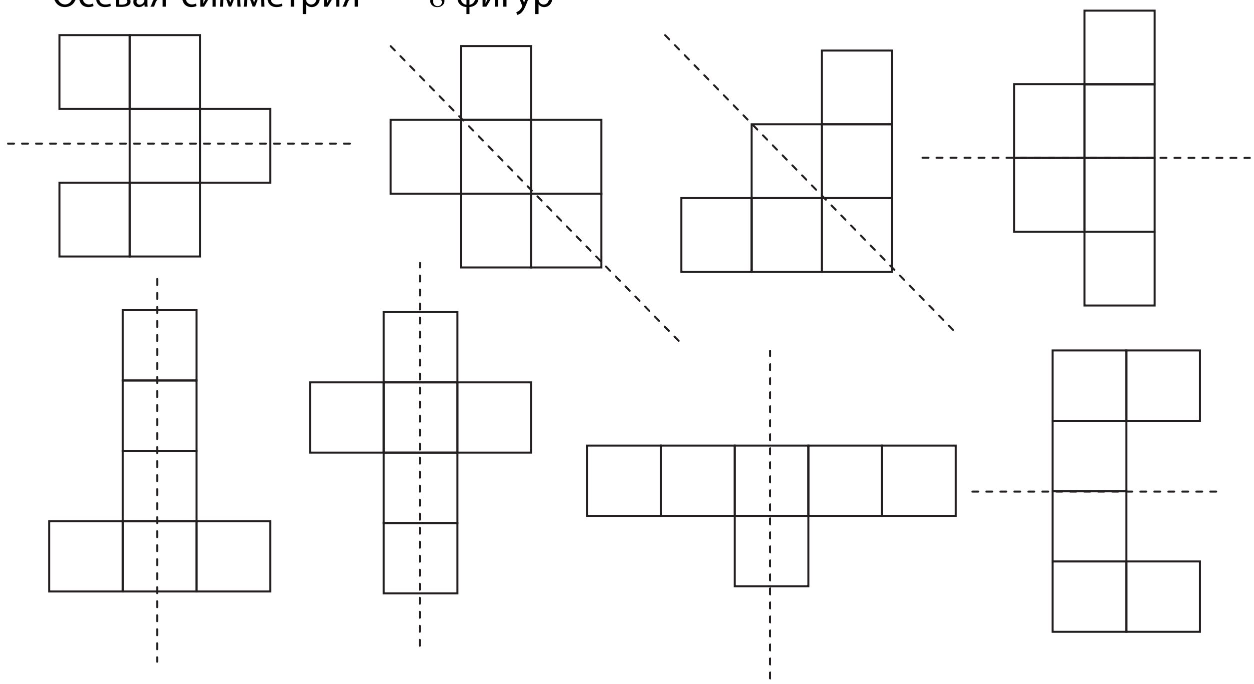
20 фигур



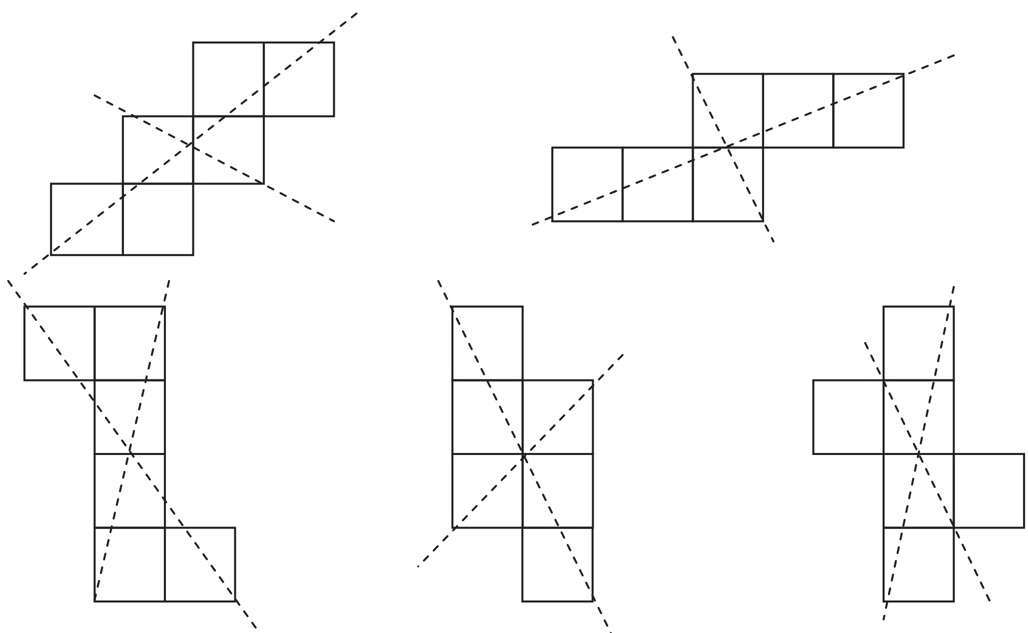
Приложение 4

Симметричные гексамино

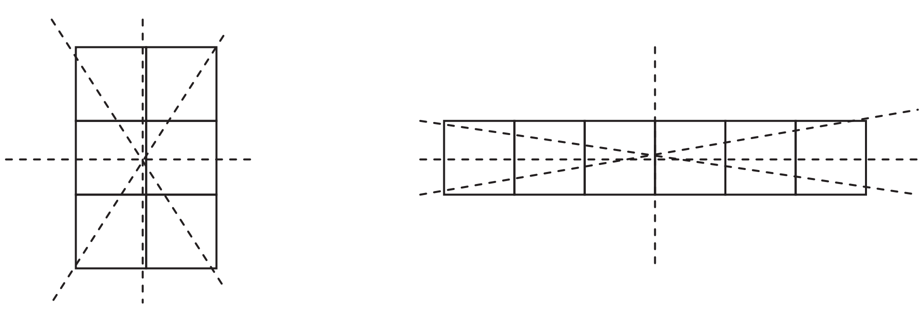
Осевая симметрия — 8 фигур



Центральная симметрия — 5 фигур

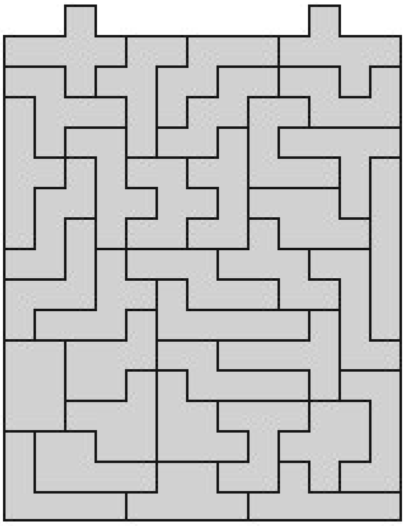


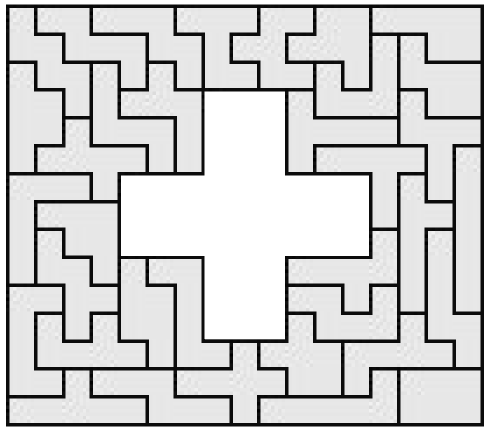
Осевая и центральные симметрии — 2 фигуры

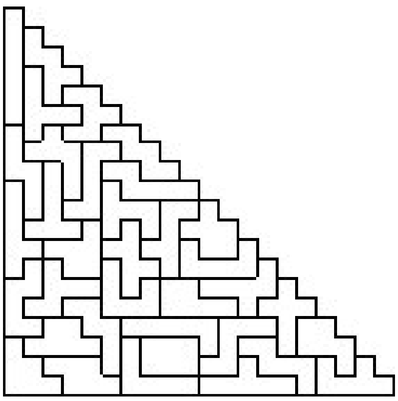


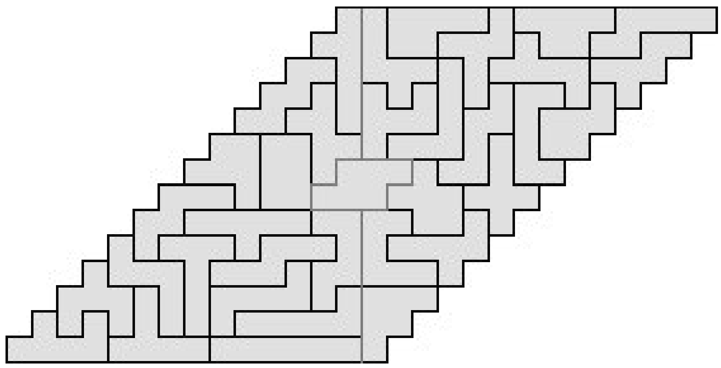
Приложение 5

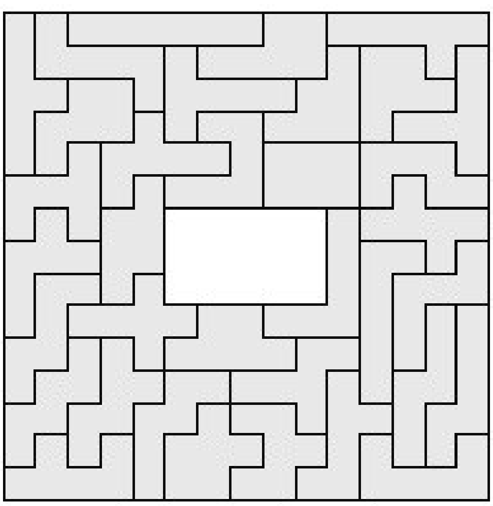
Фигуры, составленные из 35 «свободных» фигур гексамино

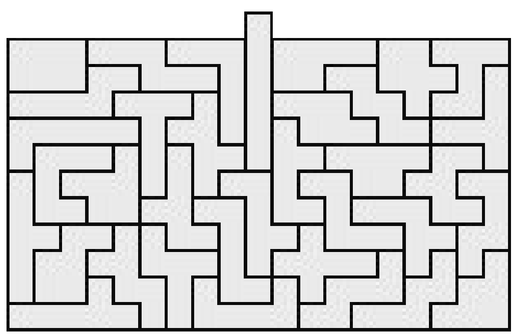








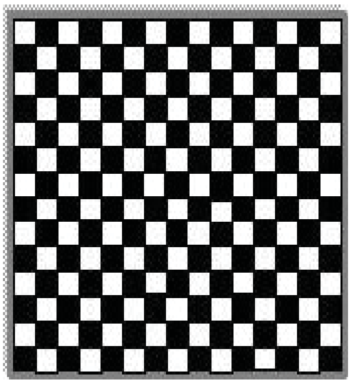




Приложение 6

Продукт проекта — игра «гексамино»

1 — доска

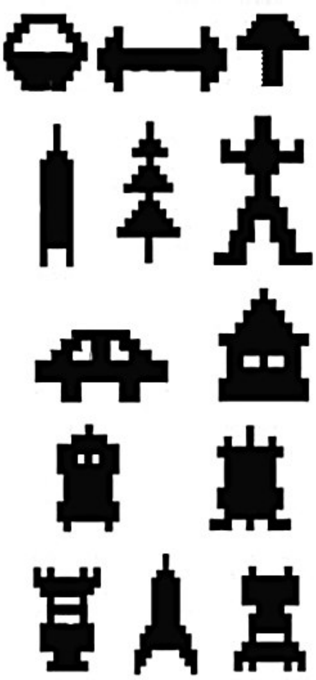


2 — набор гексамино (**35** штук)

3 — инструкция по применению

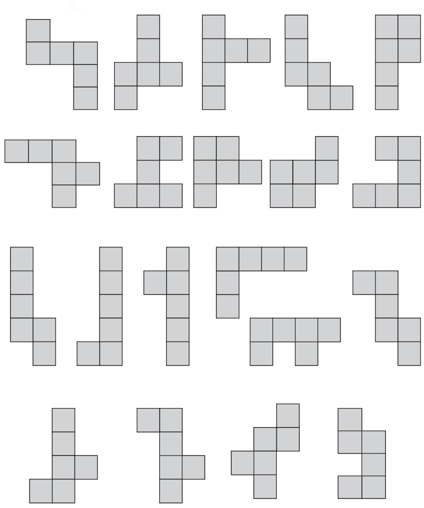
Инструкция по применению:

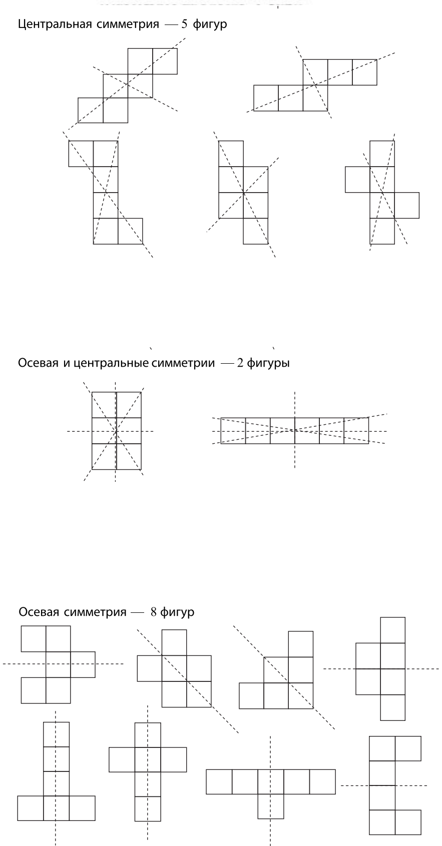
. Собирание фигур из гексамино. Предлагается ва варианта: Попробуйте собрать фигуру по илуэту (это сложно, но интересно), если у вас не олучилось можно собрать по предлагаемой хеме, а затем придумать свою, т.к. возможны есколько вариантов сборки для одной фигуры. акже можно придумывать свои фигуры.



2. В игру «гексамино» могут играть от 2 до 7 человек. Каждый игрок берет из банка по 5 гексамино, если участников меньше 7, то после очередного хода игрок доберает из банка гексамино. Игроки по очереди ставят фигуры на доску, проигрывает тот из игроков, кто не может поставить свое гексамино на доску. Для игры удобно использовать доску с шахматной раскраской.

3. Фигуры гексамино могут использоваться на уроках, как дидактический материал:
1) для вычисления площади фигур;
2) для знакомства с симметрией:





Приложение 7
Самостоятельно разработанные фигуры из гексамино