ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ИЗУЧЕНИЯ ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ

Ильнур Сабитович Гумеров,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, Сибайского института (филиал) ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», gis_71@mail.ru

• решение неравенств • подготовка к ЕГЭ • метод интервалов

В СТАТЬЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ И ИЗУЧЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ В 11-М КЛАССЕ. ПРЕДЛОЖЕННАЯ МЕТОДИКА ПОЗВОЛЯЕТ ПОЗНАКОМИТЬ ШКОЛЬНИКОВ С УНИВЕРСАЛЬНЫМ МЕТОДОМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ С ОБОСНОВАНИЕМ ПРИМЕНИМОСТИ ЭТОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ РАЗНОГО ТИПА.

Одной из основных составных линий школьного курса математики, реализуемой на протяжении практически всего курса математики средней школы, является решение неравенств – начиная с линейных и заканчивая логарифмическими и комбинированными неравенствами и неравенствами с параметрами. Поэтому на этапе обобщающего повторения в 11-м классе и в процессе подготовки к ЕГЭ этой теме должно быть уделено особое внимание.

Естественно, нужно повторить способы решения стандартных неравенств различного типа (рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, по возможности – тригонометрических и неравенств с модулем), а также рассмотреть решение комбинированных неравенств, сочетающих в себе вышеуказанные типы неравенств. При этом возникают следующие проблемы:

1) «вечная» учительская проблема – нехватка часов;
2) проблема методическая – у учащихся не складывается «единой картины мира» (в данном случае «мира неравенств»): не возникает понимания, что, в принципе, какого бы типа ни было неравенство, с функциональной точки зрения все эти неравенства, по сути, одинаковы;
3) «разнородность» способов решения неравенств различного типа приводит к плохому запоминанию и непониманию этих способов.

Приведенная методика, конечно, не решает всех этих проблем, но может существенно помочь в их преодолении. Для реализации данной разработки требуется как минимум два урока, лучше спаренных. Мы приводим подробно только основные моменты занятия, обозначив остальные схематично.

Тема: Обобщенный метод интервалов и его применение для решения неравенств различных типов.

«Предыстория урока»: предполагается, что перед этими занятиями было проведено повторение по методам решения стандартных неравенств и учащиеся получили как домашнее задание 3–4 неравенства различного типа.

Примерный ход занятия

1. В начале занятия проверяем домашние задачи и повторяем способы решения стандартных уравнений: рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических.

2. Далее напоминаем основные этапы метода интервалов, который обычно используется при решении рациональных неравенств. После этого учителю нужно привести обоснование идеи метода интервалов на примере решения «условного» рационального неравенства вида

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

(напомнить: в правой части неравенства обязательно должен быть 0!). На доске

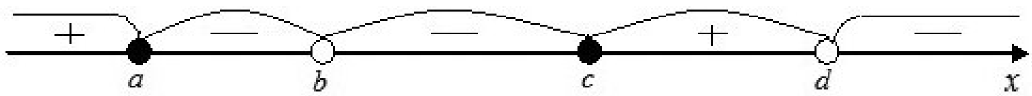

Рис. 1. Промежутки знакопостоянства

(оставляя место для большого чертежа) пишем этапы решения:

1) рассмотрим функцию $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

2) находим точки разрыва этой функции, т.е. точки, в которых $g(x)=0$ (решаем уравнение);

3) находим нули функции, решая уравнение $f(x)=0$;

4) изображаем эти точки на числовой прямой соответствующими «кружочками» (например, пусть будет две точки разрыва – *b, d* и два нуля – *a, c,* см. рис. 1);

5) находим знаки функции на каждом полученном интервале (при помощи пробных точек) и отмечаем их на чертеже:

6) выписываем ответ (в данном случае промежутки, где функция неотрицательна).

Далее мы говорим, что такой чертеж на самом деле является «упрощенным» графиком данной функции y, который, например, может иметь следующий вид (рис. 2).

По графику нужно пояснить графический смысл корней уравнения $y=0$ и неравенств $y>0, y<0$; отметить положение нулей функции (точки пересечения графика с осью Ox); отметить точки разрыва; показать, где функция положительна (график функции

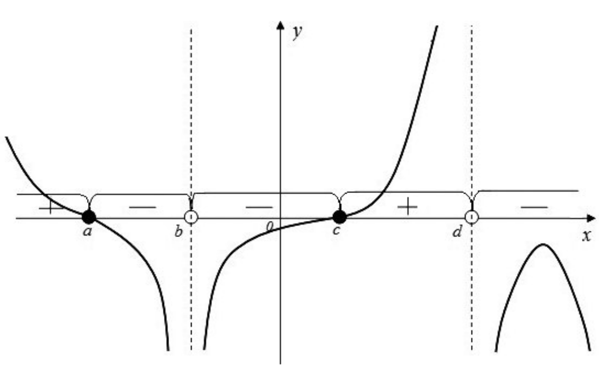

Рис. 2. График функции

выше оси Ox), где функция отрицательна (график ниже оси Ox) и напомнить «интуитивное» понятие непрерывности функции: график непрерывной функции представляет собой непрерывную линию (т.е. эту линию можно «провести, не отрывая карандаш от бумаги») на всей области определения функции.

Идея метода интервалов заключается в следующем: непрерывная на всей своей области определения функция может менять знак только при переходе через нули функции (с иллюстрацией по графику – чтобы график оказался по другую сторону оси Ox, непрерывная линия обязательно пересечет ось Ox). Далее ставим вопрос: почему мы еще находим точки разрыва функции? (ответ: т.к. при переходе через эти точки также может измениться знак – иллюстрируем по графику).

Следующий вопрос: почему для нахождения знака функции на интервале достаточно найти знак функции в любой точке интервала? (ответ: т.к. на любом из этих интервалов функция знакопостоянна, т.е. график находится только по одну сторону от оси Ox, и поэтому знак функции можно определить по знаку значения функции в любой точке интервала).

Далее выдвигаем гипотезу: нельзя ли эту схему применить для решения любого неравенства? В принципе, все этапы рассматриваемого метода не имеют никаких ограничений на вид функции, главное, чтобы она была непрерывна на всей области определения (здесь нужно отметить, что все функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны). Только в приведенной выше схеме нужно этап 2 сформулировать в более общем виде: «находим область определения рассматриваемой функции». В этом случае мы получаем обобщенный метод интервалов, который применим практически ко всем типам неравенств (в этом смысле и используется термин «обобщенный метод интервалов»; есть и другие на-

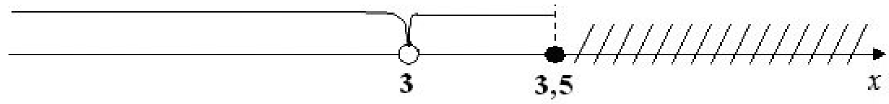

Рис. 3. Промежутки знакопостоянства

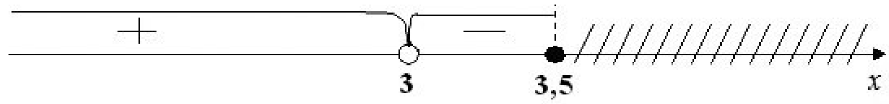

Рис. 4. Знаки функции на промежутках знакопостоянства

звания такого подхода к решению неравенств, например: «метод интервалов для непрерывных функций»). Основным преимуществом этого метода является то, что вместо решения неравенства (со всеми громоздкими равносильными переходами) мы решаем уравнения и вычисляем значения функции в некоторых точках.

3. Закрепление темы можно провести на примере решения обобщенным методом интервалов тех же неравенств, которые были в домашнем задании (для сравнения).

Пример.

Решить неравенство $\sqrt{7-2x} > x-2.$

Поэтапное решение (работаем в постоянном контакте с классом: что делаем дальше? как находим? и т.д.):

1) Перепишем неравенство в виде

$\sqrt{7-2x}-x+2>0.$ Рассмотрим функцию

$f(x)=\sqrt{7-2x}-x+2.$

2) Найдем область определения: $7-2x\geq 0.$

Получаем: $D(f)=(-\infty;\ 3{,}5].$

3) Находим нули функции из уравнения

$f(x)=0,$ т.е. $\sqrt{7-2x}-x+2=0$ или

$\sqrt{7-2x}=x-2.$ Возводим обе части уравнения в квадрат и получаем возможные корни $x=3,\ x=-1.$ При этом второй корень лишний (напомнить об обязательной проверке при возведении в квадрат!). Остается $x=3.$

4) Изобразим на числовой прямой область определения и нуль функции (промежутки, которые не входят в область определения, вообще зачеркиваем – они не нужны, см. рис. 3).

5) Найдем знаки функции на полученных интервалах, используя пробные точки:

– интервал $(-\infty;\ 3)$: $f(0)=\sqrt{7-2\cdot 0}-0+2=$ $=\sqrt{7}+2>0$, ставим знак «+»;

– интервал $(3;\ 3{,}5]$: $f(3{,}5)=\sqrt{7-2\cdot 3{,}5}-$ $-3{,}5+2=-3{,}5+2<0$, ставим знак «–» (можно брать граничную точку области определения!);

Отмечаем полученные знаки на чертеже (рис. 4).

6) Выписываем ответ (по смыслу неравенства нам нужен интервал, где функция положительна): $x\in(-\infty;\ 3).$

Далее разбираем еще 2–3 неравенства различного типа (можно взять и часть домашних примеров для сравнения), а также нужно рассмотреть решение комбинированного неравенства.

4. Делаем обобщение в виде устного опроса:

– на каком основном свойстве функции основан метод интервалов?
– какие преимущества использования обобщенного метода интервалов для решения неравенств различного типа?

Также нужно обратить внимание учащихся на то, что обобщенный метод интервалов удобен при решении комбинированных неравенств, так как в этом случае затруднительно применение стандартных схем решения неравенств определенного типа. Формулируем домашнее задание – решить неравенства (2–3 неравенства различного типа и 1–2 неравенства комбинированного типа, можно из заданий ЕГЭ). ❑