

К проблеме модернизации математического образования

Сергей Рувимович Когаловский,

профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук.

• курс математики • методы обучения • математическое образование • строгие математические понятия •

Потребности современного общества диктуют существенный пересмотр не только содержания школьного курса математики, но и методов обучения, самих дидактических принципов, целей математического образования. «Новая социокультурная функция знания преобразует стиль жизни в когнитивно сфокусированный так, что человек начинает относиться к миру... как к изменчивому новому, требующему поисковых способов мышления. Такое положение дел формирует научно-исследовательский тип социализации»¹.

«Современное образование... обеспечивает освоение уже готовых знаний, но не порождение их и не проектирование новых способов их употребления»². И модернизация образования должна способствовать формированию способностей учащихся к порождению знаний и проектированию новых способов употребления знаний. А значит, предполагать развитие их способностей к поисково-исследовательской деятельности.

Сказанное в особой степени относится к математическому образованию. Это нашло отражение в стандартах нового поколения. В частности, математическое образование, соответствующее этим стандартам, направляется на «формирование общих способностей интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности».

Строгие понятия, являющиеся ведущими в курсе математики старшей школы, выступают и как носители методов решения широкого круга задач, и как носители средств их обоснования, и как формы представления стратегий поисково-исследовательской деятельности, и как носители потенции их развития, и как средства системной организации знаний, и как средства развития дальновидения и дальнего действия мышления. Они становятся стратегическими и тактическими орудиями математической деятельности. Поэтому центральная задача обучения математике в старшей школе, отвечающая задаче модернизации образования, — способствовать освоению учащимися таких понятий *во всех названных их ролях* и постижению логики процессов их формирования и развития, несущему эффективное и качественное освоение математических знаний, их надпредметного начала. Решение этой задачи требует пересмотра методологических оснований методики обучения математике.

Строгие понятия, изучаемые в основной школе, предстают как продукты прояснения, «очищения от замутненности», представлений, протопонятий, являющихся их истоками. «Расстояния» между такими понятиями и их истоками малы, их освоение не предполагает радикального пере-

¹ Карпов А.О. Современная теория научного образования: проблемы становления // Вопросы философии. 2010. № 5. С. 15–24.

² Громыко Ю.В. Проектирование и программирование развития образования. М.: Московская академия развития образования, 1996.

смотра наличествующего опыта учащихся, его перестройки. Иначе дело обстоит, например, с понятиями предела, непрерывности, касательной. Представления, прото-понятия, являющиеся их истоками, синкретичны, и эти понятия являются отнюдь не продуктами «очищения от замутненности» своих истоков, то есть экстрагирования из них рационального содержания. Их введение посредством определений, к тому же имеющих высокий уровень логической сложности и скрывающих их деятельностное существо, вызывает у учащихся большие трудности. Природосообразным путём освоения таких понятий является восхождение к ним как к продуктам развития прото-понятий, приводящего к их преобразению, а с ним — к качественно новым возможностям.

Сложность центральной задачи методики обучения математике состоит не только в сложности воплощения многоролевого характера ведущих строгих математических понятий, но и в том, что они являются продуктами многоступенчатых преобразований их прообразов, несущими преобразования использующей их математической деятельности, её внутренней формы. «Ядром» этой задачи является разработка моделей процессов восхождения от «натуральной» формы мышления к культурной, от прото-понятий, или «житейских понятий», к строгим понятиям как перехода «в новый и высший план мысли»³, как процессов, позволяющих осуществлять приобщение учащихся к методологическим знаниям, как к такому средству изучения математики, которое несло бы знания о продуктивных способах самообучения. Такие процессы не могут не быть многостадийными, сопровождающимися преобразованиями учебной деятельности, то есть коренными изменениями её содержания, формы, направлений и самих её целей.

Решение центральной задачи несёт подход к обучению математике⁴, в соответствии с которым конструирование учебной де-

³ Выготский Л.С. Мышление и речь // Выготский Л.С. Собр. соч. Т. 2. М. 1982.

⁴ Коголовский С.Р. К методологии преобразующего обучения (Обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.

ятельности основывается на следующих ниже положениях.

I. Освоение ведущих строгих мате-

матических понятий требует методов, соотносящихся с их природой, с тем множеством важных ролей, которые они играют в математической деятельности. *Самим историческим процессом формирования такого понятия его форма, его дух, характер его функционирования существенно привязаны не к тем или иным единичным вопросам, а к представляемой им развитой теории как целому. А значит, освоение такого понятия, осознание его существа, его ролей, характера его использования, значимых направлений его развития возможно только в контексте освоения, по крайней мере, начал этой теории, сплавленных с практикой их применения, вместе с нею, вместе с её развёртыванием, вместе с постижением логики её развёртывания.*

Вообще говоря, существует множество работоспособных вариантов строгого понятия как модели прото-понятия. И демонстрация этого представляется важной задачей обучения математике. А значит, важным компонентом процесса освоения такого понятия должно быть приведение учащихся к осознанию того, что вошедший в математический обиход вариант строгого понятия является более «работоспособным», чем другие его варианты, которые естественно рассматривать в контексте развёртываемой теории (и что в процессе развития рассматриваемой теории или погружения её в более широкую теорию этот вариант может быть снят другим, лучше отвечающим новым условиям).

Например, процесс восхождения от интуитивных представлений о пределе последовательности к строгому понятию предела последовательности воспринимается обычно как процесс «очищения» этих представлений от «замутненности», то есть как процесс экстрагирования из них того рационального содержания, которое имеется в этих представлениях. В действительности, этот процесс приводит к *конструированию* одного из многих возможных вариантов рационального содержания, не просто согласуемых с этими представлениями, но «адекватных» им.

Например, естественен и такой вариант строгого понятия предела последовательности, при котором имеет предел, равный нулю, последовательность c , строящаяся

так: для всякого n между членом с номером 2^n и следующим за ним членом последовательности a , сходящейся к 0, вставляется n -й член последовательности b , сходящейся к 1. Ведь с точки зрения «здорового смысла», чем далее, тем всё реже в c появляются члены последовательности b , и где-то очень далеко, там, где номера членов нашей последовательности будут непредставимо огромными, члены из последовательности b будут появляться настолько исчезающе редко, что последовательность c почти не будет отличаться от последовательности a . Иначе говоря, она приближается к тому же числу, что и a , то есть её предел равен 0. И такое понимание предела не менее естественно и не менее продуктивно: его «очищение» ведёт, например, к понятию сходимости по вероятности, взаимноопределимому с классическим понятием сходимости. Но в рамках классического математического анализа классическое понятие сходимости более работоспособно.

Приведённый пример демонстрирует и то, что, вообще говоря, *возможности, несомые строгим понятием, не исчерпывают тот орудийный потенциал, который заложен в его истоках.*

Положение I показывает также, что задача освоения того или иного поля математической деятельности должна решаться конструированием продуктивной модели «исторического» процесса развития этого поля. И потому начальной стадией конструируемого процесса должно быть обращение к ведущему прото-понятию, послужившему истоком изучаемого поля математической деятельности, истоком ведущего строгого понятия, представляющего это поле.

II. Природосообразное, продуктивное освоение такого понятия — это освоение его как продуктивной модели прото-понятия, являющегося его историческим или конструируемым истоком. При таком освоении с самого начала осознаётся прото-смысл понятия и процесс его освоения ведом механизмами понимания, развивающимися вместе с этим процессом. И потому процесс освоения понятия должен начинаться с освоения и развития самого прото-понятия и выстраиваемых на его базе прото-теории и практики её применения.

«Развитие житейского понятия должно достигнуть известного уровня для того, чтобы <учащийся> мог усвоить научное понятие <и осознать> превосходство научного понятия над ним»⁵. Это не противоречит сказанному выше, что возможности, несомые строгим понятием, не исчерпывают орудийный потенциал, заложенный в его истоках. Ведь работа научного понятия — это работа теоретического мышления, которое *включает* в себя в качестве своих неотъемлемых компонентов и формы мышления, обычно противопоставляемые теоретической форме. Теоретическое мышление начинается и протекает уже на уровне образного мышления⁶. В работе О.С. Анисимова показывается необычайное богатство возможностей образного мышления, его преобладающее влияние на взаимодействующие с ним формы мышления⁷. Орудийный потенциал, заложенный в образном мышлении, не сводим к рациональным формам.

Восхождение на теоретический уровень и его освоение, «переход в новый и высший план мысли» нуждаются в активной подпитке «низшими» его формами. Это положение, подтверждаемое психологическими исследованиями, да и всей историей развития математики, помогает осознать пагубность одностороннего понимания теоретического мышления и проистекающего из него одностороннего развития теоретического начала в обучении.

Только определения ведущих строгих понятий не представляют их как продукты многоступенчатых преобразований, «скрывая» историю их становления, а тем самым и «сущности». И потому при прямом приобщении учащихся к такому понятию оно «вырывается из его естественной связи, берётся в застывшем... виде вне связи с теми... процессами мышления, в которых оно...

⁵ **Выготский Л.С.** Мышление и речь // Выготский Л.С. Собр. соч. Т. 2. М. 1982. С. 263.

⁶ **Рубцов В.В., Марголис А.А., Телегин М.В.** Психологическое исследование генеза и развития житейских понятий в условиях учебного диалога (первый этап) // Психологическая наука и образование. 2007. № 2. С. 61–72; **Рубцов В.В., Марголис А.А., Телегин М.В.** Психологическое исследование генеза и развития житейских понятий в условиях учебного диалога (второй этап) // Психологическая наука и образование. 2008. № 2. С. 61–69.

⁷ **Анисимов О.С.** Образ: моменты «естественного» и «искусственного» // Мир психологии. 2009. № 4. С. 21–30.

рождается и живёт... Прямое обучение понятиям...оказывается фактически невозможным и педагогически бесплодным»⁸.

Представление общих методов в форме строгих понятий является результатом абстрагирования от присущих им тактик внимания и способов действий, от связанных с ними процедур. Оно «скрывает» эти планы. Приобщение к ним, отправляясь от такой их формы, требует длительной работы по «раскрытию» этих планов. К тому же такой способ приобщения подавляет развитие поисково-исследовательской деятельности учащихся. А приобщение посредством развития учебной деятельности, приводящего к открытию метода, ведёт к развитию их поисково-исследовательской деятельности, к освоению её стратегий и тем самым — к развитию ориентировки и наращиванию потенциала дальнейшего развития. Только такой путь приобщения ведёт к постижению и освоению надпредметного начала, содержащегося в математических знаниях.

Представления, прото-понятие, явившиеся истоком сформированного строгого понятия, взаимодействуя с ним, задавая начальные направления его развития, развиваются и сами и тем самым способствуют развитию ориентировки, а значит, и развитию поисково-исследовательской деятельности. И это является дополнительным подтверждением значимости «наивной» стадии формирования строгого понятия. Урезание такой стадии, её низведение до уровня всего лишь предварительных разъяснений несёт трудно восполнимые потери в деле собственно математического и общего интеллектуального развития учащихся.

III. «Наивные» формы мышления должны участвовать в учебной деятельности и развиваться, взаимодействуя с «высшими» его формами, не только на начальных её стади-

ях, но на всём её протяжении как неотъемлемые компоненты теоретического мышления, обеспечивающие его полнокровное функционирование и развитие.

«Раскрывающееся в учебной деятельности новое видение ситуации... ведёт к изменению его «центрации», его ориентировки в осваиваемом поле, к психологической реконструкции поля, побуждающей к его логической реконструкции... Элементы, находившиеся в пренебрежении, выделяются на передний план, а прежде доминировавшие в сознании <учащегося> теряют своё определяющее значение»⁹. Так осуществляется естественный переход от «житейского» понятия к научному, от прото-понятия — к строгому математическому понятию.

Строгое понятие, сформированное как форма «уточнения» прото-понятия, как одна из возможных таких форм, как его модель, обретает онтологический статус. Оно само становится не только предметом, но и объектом изучения. Рождаемые в результате этого новые задачи направляют на новый характер поисково-исследовательской деятельности, на формирование новых её целей и средств, новых тактик внимания, новой ориентировки. Начинается преобразование языка образов. Расширяется «задействованная» часть объёма понятия. Происходит развитие и символически-операторного языка, и языка образов, и их взаимодействий¹⁰.

Уже в процессе освоения ведущего строгого математического понятия как модели прото-понятия, послужившего его истоком, оно становится методом своего «само»-исследования и средством своего «само»-обоснования как метода. Тем самым оно обретает и реализует потенциальную направленность на обретение формы, адекватной всем этим его качествам и ролям, и полнокровной возможности продуктивных взаимодействий заложенных в нём прагматической направленности и направленности на работу «чистого сознания».

«Сила научных понятий обнаруживается в той сфере, которая... определяется высшими свойствами понятий — осознанностью и произвольностью; как раз в этой сфере обнаруживают свою слабость житейские понятия..., сильные в сфере спонтанного,

⁸ Выготский Л.С. Мышление и речь // Выготский Л.С. Собр. соч. Т. 2. М. 1982. С. 189.

⁹ Гальперин П.Я., Эльконин Д.Б. К анализу теории Ж. Пиаже о развитии детского мышления // Флейвелл Д. Генетическая психология Жана Пиаже. М.: Просвещение, 1967. С. 620–621.

¹⁰ Коголовский С.Р. К методологии преобразующего обучения (Обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.

ситуационно-осмысленного, <частного> применения, в сфере опыта и эмпиризма. Развитие спонтанных понятий начинается в сфере... эмпирии и движется в направлении к высшим свойствам понятий: осознанности и произвольности. Развитие научных понятий начинается в сфере осознанности и произвольности и продолжается далее, прорастая вниз в сферу личного опыта и конкретности»¹¹. А потенция саморазвития, заложенная в научных понятиях, реализуется так, что прорастание «вниз в сферу личного опыта и конкретности» сопровождается прорастанием «вверх», подготавливающим прорывы на новые уровни деятельности, приводящие к её преобразованиям.

Уровни учебной математической деятельности младших и старших школьников, уровни сложности осваиваемых ими понятий существенно различаются. Но при всей существенности этих различий в классической работе Л.С. Выготского усматриваются во многом общие черты процессов освоения научных понятий, несущих преобразование способов мышления, «переход в новый и высший план мысли», место и роль житейских понятий, прото-понятий в этих процессах. С подходом к обучению, следующим процитированным положением из этой работы, едва ли совместима установка на опрощение курса математики, якобы приводящее к большей его доступности, поскольку доступность математики (как учебного предмета) достигается не опрощением, или обеднением, низводящим её к абстрактности, а обогащением многообразием связей, то есть восхождением ко всё большей конкретности.

Рассмотрение понятия в разных контекстах рождает новые его связи и отношения, новое его содержание, новые смыслы, новое предметное и метапредметное содержание. Это способствует продуктивности развития взаимодействий общего с особенным, выявлению и освоению новых форм и новых возможностей понятия как формы представления метода, активизации и развитию механизмов понимания, формированию и развитию необходимых функциональных органов.

IV. Большая доступность и большая эффективность обучения математике в старшей школе достигаются не опрощением

курса математики, не обеднением его содержания, а наращиванием многомерности и многоуровневости учебной деятельности, то есть следованием той сложности и многомерности, каковую представляют природосообразные процессы восхождения к развитым формам математической деятельности.

Едва ли с таким подходом совместима и всё ещё бытующая установка, выражаемая тезисом «математика — это логика», следование которой препятствует реализации огромного развивающего потенциала, несомного обучением математике, в том числе и логическому развитию учащихся, такому, которое несло бы их математическое, а посредством этого и общее интеллектуальное развитие.

Такое логическое развитие невозможно как логическое развитие *само по себе*, как чисто логическое развитие. Обычно понимаемая формальная логика является весьма важным, но лишь одним из многих компонентов математической деятельности (и мышления вообще) и лишь одной из множества логик, осознанно или неосознанно участвующих в ней и активно взаимодействующих (так, в поиске доказательства теоремы, например, относящейся к началам анализа, в самом её доказательстве и в проверке доказательства участвуют разные логики). И потому логическое развитие учащегося, отвечающее задаче его математического развития, осуществимо через взаимодействия этого компонента со многими другими компонентами математической деятельности, через соотносённость его с этой деятельностью как части с целым.

Выразим сказанное почти дословным повторением слов Выготского: компоненты деятельности участвуют в ней не столько как самостоятельно развивающиеся сообразно логике собственных закономерностей, сколько опосредованно, как направленные на решение определённой задачи и приведённые в такое сочетание, такой синтез, внутри которого каждый из них обретает своё истинное функциональное значение.

Обучение, направленное на формирование исследования

¹¹ **Выготский Л.С.** Мышление и речь // Выготский Л.С. Собр. соч. Т. 2. М. 1982. С. 263.

тельских способов работы со знанием и способствующее формированию способностей к получению новых знаний, следует гуманитарным ценностям и становится потребностью развивающегося социума. Едва ли с такой направленностью обучения совместим отказ от названного подхода.

Итак, освоение строгих общих понятий становится эффективным при осуществлении процессов их формирования, процессов восхождения к ним. Происходящее в этих процессах развитие учащихся как субъектов учебной деятельности делает такие процессы ведущим средством достижения продуктивности обучения математике.

Переход от житейского понятия к научному «понимается Л.С. Выготским как преодоление натуральной формы [мышления]. Это не постепенный, эволюционный процесс, а сдвиг и скачок, в котором натуральная и культурная (реальная и идеальная) формы вступают в конфликты и коллизии»¹². В результате научное понятие предстаёт как *противостоящее* житейскому, культурная (идеальная) форма — как *противостоящая* натуральной (реальной).

Но это переход, осуществляемый прямым *введением* научного понятия. И разве при нём научное понятие не вырывается из его естественной связи уже тем, что оно *привносится*? Разве не затрудняется вследствие этого освоение «нового и высшего плана мысли» и не блокируется развитие способностей к освоению новых знаний? И разве не будет служить препятствием усвоению научного понятия высокий уровень логической сложности его определения или то, что оно является продуктом многоступенчатых абстрагирований?

Таковы понятия функции, начальные (строгие) понятия математического анализа. Таковы и «простейшие» геометрические понятия, содержание и способы функционирования которых являются продуктами преобразования наивных геометрических рассуждений при восхождении к рассуждениям на аксиоматическом уровне.

Процессы *восхождения* к строгим понятиям от прото-по-

нятий, являющихся их истоками, делают качественно иным *переход* от натуральной формы к культурной, по сравнению с тем, как это описывается Л.С. Выготским и Б.Д. Элькониным. Они снимают конфликты между прото-понятием и научным понятием, между натуральной и культурной формой посредством осуществления перехода «натуральное — культурное» не как втискивания мыследеятельности учащихся в «правильные» формы мыслеповедения, не как «вживления» последних, а как направляемого «само»-развития наличествующих форм мыследеятельности, ведущего к рождению новых, культурных их форм, представляемых сформированными строгими понятиями, носителями идеального.

Тем самым становятся существенно иными отношения между реальной и идеальной формами и сам характер идеального, поскольку сформированное понятие не противостоит прото-понятию, послужившему его истоком, а воспринимается и работает как его идеальная форма. (Идеальное в таких процессах предстаёт не как пред-существующее, а как формируемый процессом развития реального один из многих возможных вариантов идеального. Процессы освоения строгих общих понятий становятся при этом процессами движения от неразвитого идеального к развиваемому и преобразуемому идеальному.) Такие процессы несут и преобразование существа *посредничества*. Оно становится и направляющим началом в процессах, приводящих к формированию идеальных форм.

И *субъект поведения* возникает не в «точке встречи» идеальной и реальной форм, а раньше — на той стадии процесса формирования понятия, на которой происходит столкновение с пограничной ситуацией, приводящее к осознанию необходимости уточнения прото-понятия (как необходимости преобразования самого способа мыследеятельности) и развивается на протяжении всех последующих стадий такого процесса.

Само содержание строгого общего математического понятия является и предметным, и надпредметным. Обучение математике, освоение таких понятий лишаются эффективности и качества, если они ограничива-

¹² Эльконин Б.Д. Введение в психологию развития. М.: 1994. С. 11.

ются направленностью на усвоение только предметного их содержания.

Важно принять во внимание и то, что ведущие строгие математические понятия являются продуктами многократных, многоступенчатых преобразований и представляют окультуренные формы «первомеханизмов» математической деятельности. Отсюда их продуктивность и необычайная широта применений.

V. Продуктивное освоение таких понятий требует сообразования с идеей развития, сопровождающегося преобразованиями способа мыследеятельности.

VI. Освоение такого понятия — это и освоение предметно-методологического начала, несомого им, заложенного в нём самим историческим процессом формирования представляемой им теории. Это и освоение общеметодологического начала, заложенного в процессе его формирования, освоения и развития, это освоение надпредметного начала, заложенного в логике этого процесса.

VII. Для того, чтобы подход к обучению, следующий положениям I–VI, вёл к решению центральной задачи обучения математике, он должен использоваться не только как метод решения тех или иных частных задач обучения, но как целостный подход к обучению математике, обеспечивающий полнокровное освоение её надпредметного начала.

VIII. Решение центральной задачи обучения математике требует «раскрепощения» субъективности учащихся, создающего условия для её направляемого развития, становящегося развитием учащихся как активных субъектов познавательной деятельности.

Все эти положения показывают, что системообразующим началом при онтогенетическом подходе должно быть выстраивание процесса обучения из процессов формирования, освоения и развития ведущих строгих математических понятий как эффективных стратегических и тактических орудий математической деятельности. Имеющийся опыт построения учебной деятельности в духе такого подхода говорит о его реализуемости, а несомое им развитие учащихся

— о его продуктивности.

Невозможно не признать ценности принадлежащей Ю.В. Громыко идеи метапредмета. Вместе с тем, важно отметить то, мимо чего проходят разработчики этой его идеи. Она несёт не только новую образовательную форму, выстраиваемую поверх традиционных учебных предметов как учебный предмет нового типа, в основе которого лежит мыследеятельностный тип интеграции учебного материала. Включение в курс математики старшей школы надпредметного содержания (как начальной формы метапредмета) не только соответствует целям обучения математике, заложенным в стандартах нового поколения, но и является необходимым средством освоения предметного содержания этого курса, а потому необходимым средством реализации в обучении этой новой образовательной формы.

Итак, освоение математических знаний, входящих в сегодняшнюю программу старшей школы, требует и основательного использования наивных форм математической деятельности, и восхождения на надпредметный уровень. □