ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ШКОЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

Александр Николаевич Дахин,
доктор педагогических наук, профессор Новосибирского государственного педагогического университета

• математика • образовательное пространство • когнитивные паттерны
• систематизация образовательного процесса • общепедагогическая модель

Учебная дисциплина «математика» занимает своё законное место в образовательном пространстве современной российской школы, а также особое положение в науке и национальной культуре. Об этом красноречиво заявлено в Концепции развития математического образования Российской Федерации [5]. На образовательную область «Математика и информатика» возложена особая миссия-цель – систематизировать образовательный процесс в целом через развитие логического мышления, осуществляемое посредством межпредметных связей. Однако в самой математике содержатся дидактические инструменты, самодостаточные, с точки зрения когнитивной психологии, для формирования особого стиля мышления, готового для творческого применения в любых исследовательских ситуациях. На это в своё время указывал Д.С. Брунер, модифицируя психологические труды Ульрика Найссера, и, разумеется, Жан Пиаже, исследовавший роль интеллекта при обеспечении адаптации человека через осознание им адекватных схем окружающего мира [6, 7].

По сути, в данной статье речь пойдёт о формировании специальных когнитивных паттернов, берущих своё начало в школьной алгебре, но не имеющих своего логического конца, что вполне естественно для любого творческого явления. Для знания-описания таких паттернов мы рискнули назвать их когнитивной гармонией, что, на наш взгляд, вполне оправдано, хотя бы в контексте одной статьи.

Сделаем небольшое эмпирическое обобщение полученных нами результатов исследовательской работы и представим понятие когнитивного паттерна в педагогической трактовке [1–3].

Во-первых, когнитивный паттерн представляет собой образец исследовательского поведения, поиска, оформления результата, которые формируются или копируются с какого-то другого учебного образца. По сути – это общепедагогическая модель. Во-вторых, что ближе для наших учебно-математических рассуждений, когнитивный паттерн – это конфигурация, или группировка частей или элементов информации в соответствующую структуру, в нашем случае – алгебраическую, приводящую к решению учебной задачи. Такие паттерны мы представим как в обобщённом виде, так и в конкретной исследовательской ситуации, описанной В.Н. Дятловым для решения задач с параметрами [4]. При этом напрашивается аналогия «когнитивного паттерна» с понятием «гештальт», уже взятого на вооружение гештальтпсихологией. Однако наше представление базируется не только и не столько на спонтанном выводе или догадке, но и на закономерностях таких выводов, имеющих под собой технологическую основу, которую мы предлагаем к рассмотрению в этой статье. Такого рода технологические основы помогут, на наш взгляд, преодолеть когнитивный диссонанс, возникающий при обсуждении этой сложной темы школьного курса алгебры.

Дело в том, что у школьников иногда возникает сложное эмоциональное состояние, когда одновременно активируются некоторые установки или знания, не согласующиеся между собой. Иногда это приводит к внутриличностному конфликту, возникающему в результате противоречий между имеющимися представлениями и внешней постановкой математической проблемы.

Для частичного снятия этого напряжения необходима когнитивная активность, возможности для которой и предоставляет данная тема алгебры.

Заметим, что в соответствии со взглядами Ж. Пиаже, индивид использует два механизма построения любой схемы, в том числе познавательной [6, с. 123–127] – ассимиляцию и аккомодацию. При ассимиляции ученик использует достаточно «жёсткую» построенную схему, мало меняющуюся при изменении ситуации.

В том случае, если ученик пытается все внешние изменения, разнообразие которых велико, особенно в задачах с параметрами, втиснуть в узкие, заданные рамки какой-то имеющейся схемы, мы имеем дело с процессом ассимиляции знаний.

Аккомодация связана с творческим изменением готовой схемы при изменении ситуации таким образом, что схема действительно становится «активной» и полностью отражает все нюансы новой алгебраической ситуации. Ниже представим попытку аккомодации схемы решения задач с параметрами [4, с. 64–67].

Начнём с рассмотрения двух соотношений и таких постановок задач, которые сводятся к вопросу о включении множеств одного из семейств в множества другого. После того как вопрос задачи будет переформулирован в терминах включения множеств, нам следует обратиться к каким-то исследовательским средствам, позволяющим хотя бы наметить траекторию поиска-квеста, приводящего к долгожданному решению. Здесь нам поможет геометрическое (или графическое) представление множества решений, т.е. мы воспользуемся в алгебре геометрической интерпретацией, что вполне допустимо в рамках межпредметных связей этих математических и педагогических партнёров. Заметим, что этот метод особенно продуктивен при анализе способов решения неравенств. Напомним, что множество решений неравенства наглядно изображается линией, поднятой над той частью числовой прямой, которая содержит числа, составляющие множество решений.

Допустим, что у нас есть какие-либо числовые множества X и Z. Будем считать, что одно из них, например X, содержится в другом, то есть в Z. Нарисуем линию над множеством X и линию на большей высоте от числовой прямой над множеством Z. То обстоятельство, что X ⊂ Z, в терминах нарисованных линий выглядит так, что линия, соответствующая большему множеству Z, накрывает линию, соответствующую меньшему множеству X, как бы нависает над ней, что видно из рис. 1.

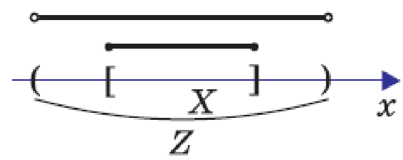

Рис. 1. *Взаимное расположение множеств*

В конкретной задаче вряд ли будет явно сказано «одно множество содержится в другом», поэтому надо подготовиться к формулировкам, по существу означающим включение множеств. Для этого приведём не претендующий на полноту набор вариантов формулировок, равносильных включению множеств. Данный набор может быть расширен на основе личного опыта учителя или ученика.

Вариант 1

Пусть даны два соотношения, обозначим их α и β, и пусть X и Z – суть множества их решений. Тогда следующие формулировки имеют одно и то же смысловое содержание:

1) X ⊂ Z;
2) каждое решение соотношения α является решением соотношения β;
3) для каждого решения соотношения α выполняется соотношение β;
4) соотношение β представляет собой следствие соотношения α.

Вариант 2

Пусть дано множество X, а Z – множество решений какого-то соотношения β. Тогда следующие формулировки имеют одно и то же содержание:

1) X ⊂ Z;
2) каждый элемент x ∈ X удовлетворяет соотношению β;
3) для всех элементов множества X (для каждого элемента множества X) выполняется соотношение β;
4) соотношение β выполняется для каждого элемента множества X (для всех элементов множества X);
5) если x ∈ X, то выполняется соотношение β.

Вариант 3

Пусть дано множество Z, а X – множество решений какого-то соотношения α. Тогда следующие формулировки имеют одно и то же содержание:
1) $X \subset Z$;
2) любое решение соотношения α лежит в множестве Z (принадлежит множеству Z).

Кроме предложенной выше наглядной интерпретации включения множеств, можно использовать другую задачу, связанную с координатной плоскостью «переменная – параметр». Изложим её в той ситуации, когда одно из множеств, пусть X, не меняется, а в качестве Z берут множества из какого-то семейства (обозначим его Z_a, $a \in A$) и ставится, например, вопрос: при каких $a \in A$ имеет место включение $X \subset Z_a$. Будем использовать координатную плоскость ($x; a$) или ($a; x$) и изображения множеств на соответствующей плоскости. Эта интерпретация работает не только при анализе включения множеств, но и в других случаях.

Иногда бывает легче выразить a через x, поэтому сначала обратимся к обсуждению наглядной интерпретации с использованием плоскости ($x; a$). Поскольку по-прежнему считаем множество X постоянным, на плоскости ($x; a$) его можно изобразить в виде вертикальной полосы, состоящей из всех ($x; a$) таких, что $x \in X$, $a \in R$.

Пусть множества семейства Z_a представляют собой сечения некоторого множества Z, то есть при фиксированном a множество Z_a состоит из всех пар ($x; a$), находящихся в множестве Z. Эта ситуация условно изображена на рис. 2, где считаем, что граница множества в него включена. При каждом фиксированном значении a можно наблюдать два множества. Во-первых, это сечение $\{(x; a): x \in X\}$ полосы, порождённой фиксированным множеством X (выделенный на рис. 2 горизонтальный отрезок на уровне a). Во-вторых, сечение Z_a множества Z на высоте a, являющееся множеством решений соотношения при рассматриваемом a. Согласно рис. 2 включение $X \subset Z_a$ выглядит так, что на соответствующем уровне сечение, порождённое множеством X, содержится в сечении Z_a множества Z.

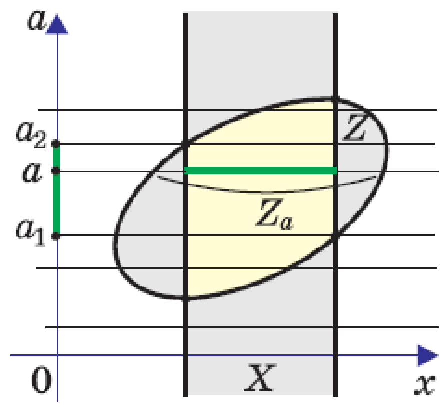

Рис. 2. *Сечение множеств*

Теперь пришла очередь анализа конкретных заданий.

Пример 1 [4, с. 80–81]

Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2a-1)\cdot x^2 + (a-2)\cdot x - 6a<0$$
при любом $a \in (2;4)$.

Решение:
Нам предстоит при каждом значении параметра a найти множество X_a решений этого неравенства. Заметим, что левая часть неравенства обращается в нуль при $x_1 = -2$ и $x_2 = 3a/(2a-1)$.

Понятно, что при $a \in (2,4)$ получается, что $x_2 > 0$, тем более $x_2 > x_1$ при указанных a. Значит, при каждом $a \in (2,4)$ множество X_a решений неравенства представляет собой промежуток $(-2, 3a/(2a-1))$. Найдём наименьшее значение выражения $3a/(2a-1)$ на отрезке [2, 4]. Для этого выделим в этом выражении постоянную составляющую и добьёмся того, чтобы в числителе дроби оказалось число, т.е. числитель был без параметра.

$$3a/(2a-1) = 1{,}5(1 + 1/(2a-1)).$$

Функция $f(a) = 1{,}5\cdot(1 + 1/(2a-1))$ убывает на [2, 4]. Следовательно, достигает на правом конце промежутка наименьшего значения, равного $f(4) = 12/7$. Принимая во внимание рассуждения, относящиеся к нахождению пересечения семейств множеств, можно утверждать, что общие для всех промежутков элементы заполняют интервал

(-2, 12/7). Действительно, если второй корень x_2 примет наименьшее значение 12/7, то для всех остальных значений параметра *a* из промежутка (2,4) исходное неравенство будет заведомо верным. Это и есть искомый результат, изображённый на рис. 3. Вопрос примера можно рассматривать как вопрос о включении множеств, если считать *a* переменной, а *x* – параметром.

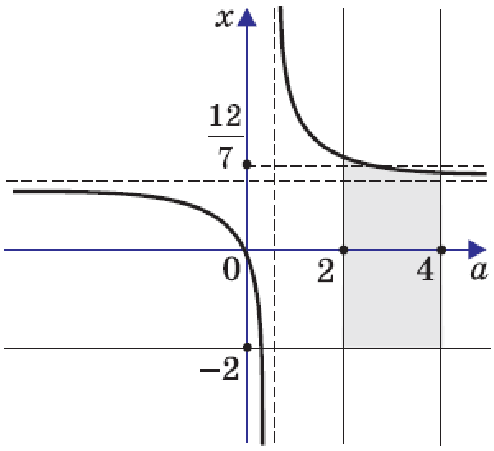

***Рис. 3.** Графическая интерпретация решения неравенства*

Удобно пояснить эти соображения на примере двух параметров, допустим, a_1 и a_2. Изобразим на рис. 4 решения $X(a_1)$ и $X(a_2)$ в виде включённых множеств.

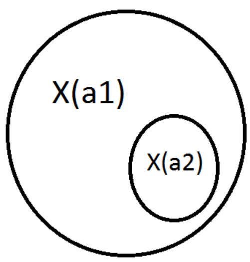

***Рис. 4.** Геометрическое представление решений для двух значений параметра*

Если спрашивается решение X, существующее при всех значениях параметра *a*, то это пересечение этих множеств. Заметим, что если бы спрашивалось, каковы те *x*, которые удовлетворяют исходному неравенству хотя бы при одном значении параметра *a* из промежутка (2, 4), то мы нашли бы наибольшее значение функции *f*(*a*) на отрезке [2, 4]. Оно равно *f*(2) = 2, и в качестве результата взяли бы множество (-2, 2). Таким образом, на диаграмме (рис. 6) это решение выглядело бы как объединение множеств.
Ответ: (-2, 12/7).

Пример 2

НГУ, 1989.
Определить, при каких значениях параметра *a* уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни.

Решение:
Первое, что приходит в голову, это найти корни квадратного уравнения и выяснить, при каких условиях выполнится требование задачи. Так и сделаем. Если *a* = 0, то уравнение имеет единственное решение *x* = 1, значит, при *a* = 0 уравнение имеет только целое решение. Это открытие вселяет оптимизм в дальнейшем поиске. Всё-таки хотя бы одно решение найдено и довольно-таки просто. Однако дальнейший анализ не столь радостный. Действительно, пусть $a \neq 0$. Найдём корни уравнения.

$$x_1 = (-3 + \sqrt{9 + 12a - 8a^3})/2a;$$

$$x_2 = (-3 - \sqrt{9 + 12a - 8a^3})/2a.$$

Работа с такими радикалами, да ещё содержащими куб параметра, вызывает уныние даже у меня. Нужны другие идеи, новые другие формы записи уравнения, инновационные (не побоюсь этого слова) методы рассуждений.

Призовём на помощь теорему Виета. Заметим мимоходом, что если корни уравнения целые, то целыми будут и их сумма, а также произведение. Это уже радует, т.к. резко ограничивает сферу поиска x_1 и x_2.

Переформулируем наше микро-открытие. Если $x_1 + x_2$ или $x_1 \cdot x_2$ не являются целыми, то либо x_1, либо x_2 не целое.

Таким образом, будем искать целые решения среди тех корней, для которых их сумма и произведение, тоже целые числа. Перепишем уравнение в приведённом виде (у нас по-прежнему $a \neq 0$).

$$x^2 + 3x/a + 2a - 3/a = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -3/a;$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2a - 3/a.$$

Выражение ($-3/a$) может быть целым только при $|a|\leq3$. Пусть $3/a=k$, где k – целое число. Тогда условие $2a-3/a$ тоже целое, означает, что ($6/k-k$) – целое. А это верно только, если $6/k$ целое.

Среди целых чисел мы должны выбрать те, на которые 6 делится нацело. Вот они: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6. Мы не уверены, что для $a=3/k$ при перечисленных k оба решения будут целыми, но то, что при других a хотя бы одно из них будет не целым, это нам известно точно.

Теперь посчитаем корни уравнения напрямую при a=3, 3/2, 1, ½, -3, -3/2, -1, -½. Легко выяснить, что целыми получились корни только при a=-1/2 и 3/2.
Ответ: a= -1/2, 3/2,0.

Ниже изложим основные рекомендации для решения задач с параметрами, подготовленные В.Н. Дятловым и представленные нами в педагогической трактовке. Есть надежда, что приведённый ниже поиск, математический и активный, дополнит его контекст когнитивный [4, с. 7–12]. Решение методически удобно организовывать на основе постановки вопросов, ответов на них и выполнения рекомендаций, соответствующих выбранным ответам.

Вопросы способствуют постановке цели на каждом шаге решения, который должен быть, разумеется, обоснован. Вопросы позволяют выявить причину, по которой то или иное действие должно быть выполнено. Обобщая опыт, предложим несколько вопросов, а также варианты ответов на них.

Начнём с вопроса, направляющего поиск либо к анализу алгебраических соотношений, либо к исследованию функций.

Какая задача ставится для соотношения? Если речь идёт о наиболее простом описании множеств семейства, то есть о решении соотношения, занимаемся решением соотношения, ориентируясь на отмеченные выше примеры.

Если говорится о каких-то связанных с этими множествами обстоятельствах, полезно поставить вопрос: рассматриваются свойства определяемых соотношениями множеств или взаимодействие таких множеств? Если спрашивается о свойствах семейства множеств, то можно решать соотношение и искать ответ на вопрос в процессе решения. Это довольно редко используемый ход, применяемый только к соотношениям, характеризуемым равенствами, однако исключать его не следует. Другие ходы порождаются отмеченными ниже общими вопросами. При изучении взаимодействия семейств множеств важны новые формулировки. Необходим базовый запас ситуаций, с которыми надо уметь работать, и способность переводить задачу с одного «языка» на другой до тех пор, пока не появится и проявится базовая ситуация. Лучше всего стремиться к таким связанным с множествами формулировкам, как включение множеств, их пересечение и т.п.

Далее следует определиться с аналитическим или геометрическим подходами. Существенно влияет на выбор пути такой вопрос – какой подход к задаче лучше: аналитический или геометрический? Геометрический путь лучше, когда параметр просто выражается через переменную или переменная через параметр. Таким образом появляется возможность:

а) использовать графики функций;
б) строить графики семейства функций, участвующих в соотношении;
в) рассматривать две переменные, участвующих в соотношении и др.

Аналитический путь нередко связан с техническими трудностями, поэтому здесь полезна как психологическая, так и геометрическая поддержка.

1. При анализе количественных характеристик, к примеру, единственности решения или чётности числа решений, возникает следующий вопрос – каковы особенности участия переменных в соотношении? При ответе на этот вопрос полезно проанализировать свойства входящих в соотношение выражений на предмет выполнения необходимых условий, сужающих множество изучаемых значений параметра до обозримого и доступного для выбора искомых значений. К примеру, если переменная входит в соотношение чётным образом, а вопрос ставится о нечётности числа решений, то нуль является решением.

2. Для систем иногда используется симметрия, иногда чётность, как основа необходимых условий. Одним из важных средств решения служит замена переменных. Она вызывается либо стремлением к упрощению технических деталей, либо к ожиданию какой-то качественно новой информации о соотношении. К замене надо относиться с большим вниманием, в частности, следить за сопровождающими её ограничениями. Отметим несколько частных наблюдений. При рассмотрении соотношений с одной переменной полезна геометрическая интерпретация, причём как в плоскости «переменная – значение», так и в плоскости «переменная – параметр». При использовании плоскости «переменная – значение» надо изучать пересечения графиков функций, на плоскости «переменная – параметр» – пересечение графика горизонтальными или вертикальными прямыми в зависимости от того, рассматривается плоскость ($x; a$) или ($a; x$). Для неравенств предпочтительнее плоскость «переменная – параметр», так как на ней ответы на вопросы получаются на основе одного множества, тогда как при использовании плоскости «переменная – значение» приходится работать с семействами множеств. Система, состоящая из уравнения и неравенства, ориентирована, как правило, на геометрический путь решения. Если уравнение и неравенство содержат одну переменную, то, как и для неравенств, можно использовать либо плоскость «переменная – значение», либо плоскость «переменная – параметр». Если система с несколькими переменными, то используется интерпретация соотношений на координатной плоскости входящих в неё переменных, обычно ($x; y$). Нередко помогает переход к новым переменным, вызванный видом соотношений и направленный на их упрощение или выявление новых переменных свойств, недостаточно просматриваемых в исходных переменных. Система из неравенств с несколькими переменными анализируется исключительно с помощью геометрической интерпретации. При рассмотрении семейства функций большую роль играет графическая интерпретация. С ней легче просматривается влияние параметра на исследуемое свойство. В целом здесь необходим анализ изменяемости изучаемых свойств в зависимости от параметра.

Литература

1. *Дахин А.Н.* Моделирование и неопределённость педагогических результатов / Л.И. Холина, Н.П. Абаскалова, А.Н. Дахин // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2015. – № 6. – С. 101–110. Scopus.
2. *Дахин А.Н.* Формирование метапредметной компетентности учащихся 9-х классов в процессе интеграции изучения физики и математики: уч. пос. / А.Н. Дахин, К.А. Юрьев; под ред. чл.-корр. РАО, д-ра физ.-мат. наук, проф. А.Ж. Жафярова; Мин-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. пед. ун-т. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2016. – 127 с.
3. *Дахин А.Н.* Математика как «живое знание» компетентного школьника / А.Н. Дахин // Народное образование. – 2017. – № 4. – С. 149–156.
4. *Дятлов В.Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 7. Задачи с параметрами / В.Н. Дятлов. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2010. – 96 с.
5. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, Москва http:// www.pravo.gov.ru, 27.12.2013.
6. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды / Жан Пиаже. – М.: Международная педагогическая академия, 1994. – 678 с.
7. *Bruner J. S.* Toward a Theory of Instruction / J. S. Bruner. – Cambridge. The Belknap Press of Harvard Univ. Press, 1967. – 176 p.