

В поисках смыслов математического образования

Владимир Александрович Адольф,

профессор, заведующий кафедрой педагогики Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук

Инга Юрьевна Степанова,

доцент кафедры информационных технологий образования Сибирского федерального университета, кандидат педагогических наук

• математическое образование • математический анализ • структурный подход •

Различные ценностные качества математики и математического образования отмечали многие выдающиеся философы, математики, физики, инженеры. Приведём цитату А.Я. Хинчина: «Я думаю, что основным общим моментом воспитательной функции математического образования ... служит приучение воспитываемых к полноценности аргументации». В приведённом высказывании отражены три взаимосвязанные и взаимопроникающие характеристики ценностей математического образования — лично значимых, общественно и государственно-значимых. Это позволяет говорить о том, что истинно ценные качества образования личности не теряются, а сохраняются на всю жизнь.

Математика имеет глубокие корни в гуманитарной традиции человечества, базирующейся на основе национального самосознания конкретных народов и государств. Всей историей своего развития математика показала, что расцвет цивилизации всегда совпадал с теми периодами жизни общества, когда она выступала как норма гуманитарной культуры. Тем не менее, повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а кому-то — подозрительным.

Можно согласиться, что математическая экспансия продолжается и нарастает, и она неизбежна с позиций развития цивилиза-

ции. Но для многих математическая деятельность скучна, математический язык однообразен. Числа, функции, теоремы и аксиомы, задачи... Формализация, необходимые условия, решение задач и уравнений — и опять формализация, необходимые условия и т. п. Какая скука! Лишь тем, кто по-настоящему увлечён, это придётся по вкусу. А как быть остальным?

Рискнём поставить следующий вопрос, несмотря на кажущуюся однозначность ответа: что лучше — поэтическая романтика или скучное однообразие? Безусловно, романтика пленяет: нас влекут горы, пещеры, ледяные пустыни, опасность, риск. Мы чтим великих подвижников — путешественников, открывающих новые земли, альпинистов, взбирающихся на недоступные вершины, отважных и дерзновенных путешественников и военных. Прогресс в жизни и в науке осуществляется соединением усилий первопроходцев и размеренным движением вперёд всей нашей цивилизации.

Эти движения со временем делают общедоступными те цели, к которым ценою жертв и страданий раньше пробирались лишь герои. Как и в жизни, в науке каждый человек может ставить перед собой двойные цели. Он должен тренировать себя для того, чтобы сделать попытку в одиночку взобраться на неприступную вершину. Но

необходимо также участвовать и в коллективном труде, обеспечивающем размерное движение цивилизации по прокладыванию дорог и коммуникаций к этим вершинам.

Постепенно мы подошли к вопросам — **чему учить, как учить и сколько учить?** Ответы на них в свою очередь зависят от ответов на другие вопросы: для чего учить, зачем учить? Для каждого поколения, на каждом этапе общественного развития эти принципиальные вопросы решались по-разному. Были времена, когда о них вообще умалчивали, ссылаясь на выдвинутые идеологические доктрины. Можно по-разному преподносить математику: представить, например, её только как науку, оставив многих школьников за бортом понимания. А можно показать, что математика подобна искусству — и не потому, что она представляет собой «искусство вычислять» или «искусство доказывать». Математика, как и искусство, это особый способ мышления, познания, деятельности. Возможно, имеет смысл по аналогии с художественными образами говорить о «математических образах» или о «математической деятельности» как специфической для математики форме отражения современной действительности.

Математика — это жизнь, но жизнь в культуре. И обязательно — жизнь человека, становящегося в своей математической деятельности. Формы, в которых математика научилась представлять жизнь, весьма многообразны. Обнаружение математического смысла в культурном явлении, то есть преобразование текста культуры в текст математический, есть деятельность на понимание. Тогда математика становится важным общеобразовательным предметом и сферой деятельности.

Прогрессивные русские педагоги-гуманисты подчёркивали, что главная цель обучения математике в школе состоит в воспитании «культуры вкуса» и пополнении недостающих, но весьма важных звеньев в системе гуманитарного образования. Л.Н. Толстой отмечал, что математика имеет задачей не обучение исчислению, а обучение приёмам человеческой мысли при исчислении, что именно эти знания нужны человеку для того, «чтобы жить хорошей жизнью».

Понятия числа, фигуры, вектора, производной отражают многообразие процессов реальной действительности и поэтому применяются для решения различных прикладных задач и задач других учебных дисциплин. Исследования свойств чисел, геометрических фигур, в их историческом контексте становятся более доступными познанию, если наглядно, в конкретной форме продемонстрировать практическое значение математического знания, связать изучение этих понятий с реальными предметами, имеющими историческое и практическое значение.

Нет сомнения в том, что математике учить необходимо. И, по меньшей мере, по двум причинам — для тренировки ума и для того, чтобы можно было помыслить, как устроен мир.

Для обозначения одного из предметов этого диспута приведём цитату из Дьедоне: «Я попрошу всех беспристрастно посмотреть на следующие темы, занимающие большое место в школьной математике:

Задачи на построение «циркулем и линейкой».

Свойства «традиционных» фигур, таких как треугольники, четырёхугольники, окружности и системы окружностей... — всё это со всеми изощрениями, накопленными поколениями «геометров» и преподавателей в поисках подходящих задач.

Весь псалтырь «тригонометрических формул» и на них калейдоскопических преобразований, позволяющих находить великолепные «решения задач» на треугольники, и, пожалуйста, имейте это в виду — «в форме, пригодной для логарифмирования...»¹.

Конечно, ни с чем подобным человек в жизни не столкнётся. Но спрашивается, важно ли при этом для инженера знать, что высоты пересекаются в одной точке, или имеет смысл овладеть принципами сопротивления материалов? Может, следует, учить принципам и только им? Ведь действительно «тригонометрические формулы» необходимы только некоторым специалистам — астрономам, геологам, составителям учебников по триго-

¹ Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная математика. М.: Наука, 1972.

нометрии. Так зачем же морочить голову школьнику?

И снова может показаться, что нет предмета для дискуссий, что Дьедоне прав. Но что-то мешает признать правоту этих слов. Само понятие «образование» более сложное **«ОБРАЗОВЫВАТЬ — ВОСПИТЫВАТЬ ВКУС»**. Оно состоит не только в приобретении знаний, умений и навыков, но и в тренировке мышления, в развитии его. Многие задачи из разных разделов математики давали пищу для ума, приучали к точности и аккуратности, учили рассуждать, искать истину, преодолевать трудности, испытывать разные пути к цели, достигать её. Они одаривали радостью успеха и ощущением красоты, и, в конечном счёте, моделировали творчество. Чем заменить всё это? И стоит ли?

Все эти элементы творчества необходимо, конечно, сохранить. Тренировать мышление можно лишь на конкретных, «частных» задачах, а не на «общих принципах». Среди тех тем, на которых можно тренировать мысль, приучать к изобретательности, научной изворотливости, преодолению интеллектуальных трудностей, задачи из различных исторических эпох представляют благодарный материал.

Но несомненно и то, что необходимо обучать пониманию сущности вещей, общим принципам и законам — и в естествознании, и в жизни. Природа «управляется» общими законами, всё связано, и всё тяготит к единству. Важно, чтобы были как-то осознаны и поняты и единство мира, и его разнообразие. Важно знать, что существуют «общие принципы», в том числе и в математике. И Лагранж, Даламбер и многие другие великие учёные старались возвыситься до понимания той «самой сути», которая соединяет разрозненные явления в мире. Законы природы имеют двойное описание — «физическое» и «экстремальное». Необходимо хотя бы в общих чертах познакомить любого человека с основами математического анализа, ибо математический анализ — неотделимая часть естествознания. Границы элементарной математики определяются соседством с математическим анализом. Математический же анализ иногда называют «высшей математикой». Некогда считалось, что в высшей математике содержится

нечто «сверхестественное», недоступное пониманию простого человека, нечто воистину «высшее», о чём в школе и говорить невозможно. На самом деле это не так.

Сформулируем тезис: «Математический (классический) анализ — это совершенно естественная, простая и элементарная наука. Ничуть не более заумная, сложная чем, скажем, «элементарная» геометрия». А теперь обоснуем его. Так, например, с функциями одного переменного вы встречались в школе. Если спросить вас, когда вы впервые начали «работать» с функциями двух переменных, многие придут в недоумение. Но в действительности все мы знакомимся с функциями двух переменных с незапамятных времён. Никто из нас не вспомнит тот день, когда был задан вопрос вроде: «Вот яблоко, а вот ещё, сколько вместе?». Но именно тогда, прибавив к одному яблоку другое и получив «два» яблока, вы впервые столкнулись с функцией двух переменных, самой древней из них, самой известной — сложением. Вот она: $z = x + y$. Если взять любую пару чисел x и y , то этой паре функция «сложение» сопоставляет число z , равное сумме x и y . Пары (1,1) будет сопоставлено число 2.

На первых порах мы осваивали сложение натуральных чисел, затем — целых; наконец, вас учили складывать любые числа. После сложения учили вычитать, умножать и делить. Вычитание, умножение и деление — всё это функции двух переменных. Под функцией двух переменных (вслед за Бернулли) можно понимать выражение, составленное из переменных величин x и y и постоянных величин. Функции двух переменных $z = F(x, y)$ тоже можно изображать графически. Одно обстоятельство позволяет нам наглядно представить их характерные особенности, ибо график функции двух переменных всегда у нас перед глазами. Вот вы стоите на земле. Ваше положение в пространстве можно задать тройкой чисел (a, b, c) , где (a, b) — географические координаты (широта и долгота), c — высота над уровнем моря. Таким образом, $c = c(a, b)$, т.е. c есть функция (a, b) . Всё, что мы видим — холмы, ложбины, овраги, горы — всё это есть «график» этой функции.

Расстанемся на время с функциями двух переменных и сделаем ещё шаг. Спросим

себя: что такое функция трёх переменных? Конечно же, это выражение, составленное из переменных x , y и z и постоянных величин. А что такое функция ста переменных? Это выражение, составленное из ста переменных. Не хватит букв? Выход очень прост. Переменные можно обозначать не разными буквами, а одной буквой x , но с индексами: $x_1, x_2, \dots, x_{100}, \dots$. Постоянные величины — аналогично.

Хочется, чтобы учитель и ученик осознали и поняли, как и зачем рождается математическая теория. Знакомясь со многими конкретными задачами, при обсуждении их решений они соприкоснутся с творчеством ряда крупнейших математиков прошлого. Идеи и методы, созданные математиками при решении конкретных проблем, обычно не исчезают, а где-нибудь обязательно возрождаются, и потому проникновение в замыслы великих идей всегда обогащают.

А.Н. Колмогоров выделил следующие цели математического исследования:

- Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14–15 лет.
- Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками.

Две сформулированные задачи тесно связаны между собой. По поводу второй замечу, что в отличие от времён создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных математических построений под любые методы расчёта, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдывающие себя на практике.

Система математики основывается на очевидностях актов сознания, а затем облекается в символическую форму и может далее развиваться, оперируя знаковыми формами. Проблемы школьной математики заключаются в том, что, следуя такому пути развития математического знания, она за-

бывает живой смысл, преисполненный наглядности, оставаясь в рамках исключительно знакового символизма. При этом «математическая романтика» остаётся только для избранных, для тех школьников, которым оперирование знаковыми образами соответствует их природным способностям, а для большинства овладение этой наукой превращается в рутину, скуку, подготовку к ЕГЭ.

Сложившееся содержание общего математического образования сверстано таким образом, что оно, включая ознакомление учащихся с основополагающими фактами (теоремами) и методами классической математики, предусматривает овладение необходимым запасом умений и навыков, достаточным для усвоения смежных дисциплин, формирования готовности к послешкольному непрерывному образованию. Такая готовность обеспечивается заложенными в курсе возможностями глубокого интеллектуального развития учащихся, их воспитания и широкого просвещения.

Появляется понимание того, что овладение математическим знанием в школе требует **структурного** подхода на культурологических основаниях. Математику можно и нужно изучать целостно, с одной стороны — с общих позиций, с другой — в контексте появления математического знания, с позиций того, как оно сложилось исторически, а с третьей стороны — активно привлекать сферы применения математического знания во всём их многообразии. Тем самым мы создадим условия для обеспечения качества математического образования в школе, формируя представления и воспитывая вкус у школьников об источниках происхождения математического знания, будем использовать математический язык, математические факты, операции, действия, математические структуры для развития мышления и готовить к использованию математического знания в различных видах деятельности, сферах практического применения.

При осмыслении возможных изменений школьного математического образования следует помнить, что математика как учебный предмет обладает уникальным гуманитарным потенциалом. Этот потенциал определяется главным образом специфи-

ческими особенностями математического мышления. Основываясь на исследовательском методе, математическое мышление включает разнообразные способы научного познания: индукцию и дедукцию, анализ и синтез, обобщение, сравнение, аналогию и т.п. Изучение математики способно оказать влияние как на развитие творческих способностей человека, так и на формирование его логико-языковой культуры.

Гуманитарная ориентация обучения математике как общеобразовательному предмету предполагает отражение приоритета исследовательской функции. Цели школьного математического образования связываются, прежде всего, с интеллектуальным развитием учащихся, формированием качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в обществе, с формированием представлений о математике как части общечеловеческой культуры, как форме описания и методе познания действительности (что не исключает необходимость приобретения всеми учащимися определённого объёма конкретных математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, для изучения смежных предметных областей, для продолжения образования).

Организация познавательной, исследовательской математической деятельности связывается с выделением этапов конструирования, проектирования и моделирования, способствующих формированию у учащихся умений осуществлять целеполагание, структурирование учебного материала, реализовывать самостоятельный познавательный поиск. При этом процесс целеполагания осуществляется при управлении извне, так как источник активности находится во внешних стимулах, конкретной задачной ситуации, проектировании познавательной деятельности. Учащиеся производят поиск процесса решения задачи, проектируя его алгоритм, и впоследствии могут обосновать и проанализировать его, **поведать** о своих действиях. Структурируя и обобщая математический материал, учащиеся осуществляют самостоятельный познавательный поиск для описания объектов и формируют свой запрос на недостающее математическое знание.

Таким образом, формируя у школьников умения осуществлять целеполагание, структурирование учебного материала, реализовывать самостоятельный познавательный поиск, мы на самом деле не совершенствуем навыки, а развиваем аналитические, прогностические, исследовательские способности, умение обобщать и свёртывать информацию. Через настойчивость, упорство, работоспособность, трудолюбие происходит воспитание логической культуры мышления и осуществляется подготовка к полноценности аргументации.

Представляется возможным высказать и ряд более конкретных предложений по овладению математическими знаниями на различных этапах школьного образования:

— начальная школа — формирование представлений школьников об источниках происхождения математического знания, способность облекать их в символическую форму, конкретизировать образы в виде логических схем, создавая основания для переноса математического знания на различные сферы деятельности;

— основная школа — формирование у школьников таких логических основ современной математики (формально-логические, логические образы), которые позволяют представить её целиком, не разделяя на алгебру и геометрию, создание оснований для индивидуального структурирования, собственного смыслового наполнения математического знания, перевода естественного языка на язык математики;

— старшая школа — овладение математическим знанием в соответствии с идеями профилизации и профессионализации.

Реализация изложенных смыслов математического образования на практике позволит формировать потребности учащихся в математической подготовке на различных этапах общего образования, актуализировать ценности математического знания, поддерживать познавательную мотивацию в освоении математической деятельности. □