Как использовать некорректные решения в преподавании математики

Александр Степанович Зеленский,
старший научный сотрудник механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидат физико-математических наук

• математика • методика обучения • ошибка • некорректное определение • ошибочное решение • самоконтроль • поиск ошибки •

Не секрет, что обычно в преподавании математики старшеклассникам применяется методика «прямого» обучения, показывающая, как ***нужно*** решать задачи того или иного типа. Содержание подавляющего большинства учебников и пособий строится по тому же принципу. При этом зачастую не объясняется, почему задачу нужно решать именно так, почему не проходит какой-то иной способ, зачем в решении столько, казалось бы, лишних условий. Учитель также обычно не отвечает на эти вопросы: либо не считает нужным этого делать (ведь способ решения показан!), либо не имеет на это времени, либо не обладает достаточной квалификацией.

На наш взгляд, именно поэтому школьники владеют приёмами решения задач поверхностно и формально. Пока «проходится» данная тема, они ещё более или менее во всеоружии, но уже через месяц не могут справиться даже со стандартными задачами (не говоря уже о задачах со слегка нестандартной постановкой).

В процессе двадцатилетней работы в лицейских математических (и экономических) классах при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова возникла идея время от времени предлагать учащимся некорректные формулировки определений и теорем, ошибочные способы решения задач (или решения с какими-то недочётами). При этом преподаватель никогда заранее не говорит о предстоящей ошибке. Это позволяет держать класс «в тонусе»: ученики привыкают к тому, что нельзя принимать «на веру» ни одну из фраз учителя.

Стоит подчеркнуть, что здесь математические ошибки изучаются не только как явление, которое нужно предупреждать и с которым необходимо бороться (это сомнению не подлежит). Делается попытка извлечь из этого явления пользу — ошибки несут здесь «обучающую функцию» и используются преподавателем для улучшения математической подготовки школьников.

Допустим, при изложении теоретического материала преподаватель умышленно даёт неверную формулировку определения или теоремы (чаще всего опускается какое-то важное ограничение). Классический пример — неверное определение периодической функции (которое, кстати, встречается в ряде книг): функция имеет период *T*, если $f(x+T)=f(x)$ для всех *x*, входящих в область определения.

Дефект этого определения обнаруживается, если мы рассмотрим, например, функцию

$$y=\frac{\sin x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Она равна $\sin x$ при $x>0$ и не определена при $x\le 0$. Для любого *x* из области определения (т. е. положительного) имеем: $\sin(x+2\pi)=\sin x$. Значит, по нашему «определению» функция периодическая. А на самом деле это, конечно, не так — если «двигаться» по оси *x* влево, функция перестаёт «повторяться» при отрицательных x — она там просто не определена!

После того, как учитель давал такое неверное «определение», бывало, что урок длился ещё 20–30 минут, пока кто-то из учеников не обнаруживал необходимость добавления в это определение условия $f(x-T)=f(x)$ (а более точно — требования того, чтобы $x-T$ тоже принадлежало области определения). Всё это время преподаватель аккуратно подводил школьников к противоречию.

В результате такой «ошибки» (и её подробного обсуждения после обнаружения) все учащиеся концентрируются на этом пункте определения. Очевидно, что если бы сразу было дано верное определение, добрая половина школьников могла бы упустить этот важный момент.

А при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника очень полезно вначале дать следующее «доказательство».

«Докажем, что сумма внутренних углов треугольника *ABC* равна 180°. Опустим из точки *B* перпендикуляр *BD* на *AC*. Обозначив сумму углов треугольника через *x*, получим для треугольника *ABD*: $\angle A+\angle ABD+90^0=x$, и для треугольника *BDC*: $\angle \tilde{N}+\angle DBC+90^0=x$. Сложив почленно эти два равенства, получим: $\angle A+\angle C+\angle ABD+\angle DBC+90^0+90^0=2x$ или $(\angle A+\angle C+\angle B)+180^0=2x$. При этом выражение в скобках — это сумма углов треугольника *ABC*, которая равна *x*. Поэтому $x+180^0=2x$, $x=180^0$, что и требовалось доказать».

Это доказательство, конечно, гораздо проще и понятнее, чем те, которые приводятся в школьных учебниках. Но, увы, оно не выдерживает критики... На самом деле здесь доказана следующая теорема: «Если во всех треугольниках сумма углов равна одному и тому же числу, то это число равно 180^0».

Беда в том, что доказать то, что сумма углов треугольника — величина постоянная, совсем не просто (во всяком случае, в нашем «доказательстве» этого не сделано). И именно ради этого и «городится огород» в школьных учебниках. Это обязательно нужно объяснить учащимся.

Приведём ещё ряд примеров подобного рода, очень полезных для понимания.

1. «Если $a>b$ и $c>d$, то $ac>bd$».

Комментарии. Здесь достаточно контрпримера: $a=5$, $b=1$, $c=-1$, $d=-3$. Убеждаемся, что $a>b$, $c>d$, но $ac<bd$. Поэтому правильная формулировка: Если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.

2. «*Окружностью* называется геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от некоторой данной точки».

Комментарии. Казалось бы, всё нормально. В школьном учебнике можно встретить точно такое же определение. Между тем там ошибки нет, а здесь есть!

Когда мы даём определение окружности в курсе планиметрии (а другой геометрии в восьмом классе ещё нет!), говорить о плоскости не нужно. Но когда говорим об этом же после 11-го класса, необходимо сказать о плоскости.

Правильная формулировка: *Окружность* — геометрическое место точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой данной точки плоскости.

Для сравнения дадим определение сферы: *сфера* — геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от некоторой данной точки.

Пожалуй, ещё бо́льший педагогический эффект заложен в анализе ошибочных решений задач. Разбор неправильного решения и поиск ошибок (речь, разумеется, идёт об «идейных» ошибках, а не просто об арифметических просчётах) могут принести огромную пользу. На примере этих «решений» можно глубже понять тот или иной метод решения, выявить какие-то тонкие моменты, понять, как именно нужно решать задачу.

В процедуре поиска ошибок в предложенном решении задачи есть ещё один важный момент: у школьника воспитываются необходимые навыки, необходимые для поиска ошибок и недочётов в собственных рассуждениях. Без тренировки этого не происходит.

Решая творчески и самостоятельно разные задачи (не только в математике), ученики часто ошибаются. Это нормально. Но если анализировать эти ошибки, делать из них правильные выводы, то постепенно учащиеся привыкают действовать чётко и безошибочно.

Тренировка процедуры поиска ошибок играет важную роль и в подготовке будущих учителей. Во-первых, это повышает их математическую культуру. А во-вторых, — помогает выработать навыки и алгоритмы проверки решений, что является одной из важных компонент их будущей профессиональной деятельности.

При этом специально сконструированные «решения» этих задач могут содержать как грубые «ляпы», видимые почти сразу, так и неточности или тонкие логические ошибки, поиск которых может занять немало времени даже у специалиста.

Применяются две формы представления таких «решений» учащимся.

Учитель может просто привести «решение» на доске. При этом нельзя заранее предупреждать школьников об ошибках. Наоборот, необходимо проявить определённый артистизм, чтобы быть как можно более убедительным. Иногда ученики замечают подвох (на самом деле, это очень хорошо), но бывает, что у них никаких сомнений не возникает. И в таких случаях очень важно дойти до «ответа», а потом «взорвать» процесс, намекнуть на то, что в изложенном «решении» не всё в порядке (а в некоторых случаях стоит не просто сделать намек на ошибку, а даже возмутиться некритически настроенной аудиторией). Дальнейший анализ задачи и всех нюансов решения в этом случае обычно бывает гораздо полезнее для слушателей, чем «гладкий» процесс решения.

Вторая форма подачи ошибочных решений выглядит так: учитель раздаёт школьникам листочки с подборкой «решений» задач по данной теме. Задача учащихся — найти ошибки и исправить их. Эта форма работы очень полезна и для студентов — будущих педагогов. Разумеется, и в этом случае необходим дальнейший разбор всех нюансов решений.

Приведём несколько примеров разной степени сложности, которые демонстрируются учащимся в процессе обучения.

1. Найти значение выражения:

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2-\left(1\frac{1}{5}\right)^2.$$

«Решение».

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2-\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = 9\frac{4}{25}-1\frac{1}{25}=8\frac{3}{25}$$

Ответ: $8\frac{3}{25}$.

Комментарии. Здесь допущены грубые ошибки. Неверно, что

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2=9\frac{4}{25} \text{ и } \left(1\frac{1}{5}\right)^2=1\frac{1}{25},$$

а «виновата» в этом формула «квадрат суммы двух чисел…». Действительно:

$$\left(1\frac{1}{5}\right)^2=\left(1+\frac{1}{5}\right)^2=1+2\cdot1\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{25}=1+\frac{2}{5}+\frac{1}{25}=1\frac{11}{25}$$

Аналогично:

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2= 9+2\cdot3\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{25}= 11\frac{14}{25}.$$

Поэтому

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2-\left(1\frac{1}{5}\right)^2= 11\frac{14}{25}-1\frac{11}{25}=10\frac{3}{25}.$$

Заметим, что гораздо проще считать квадрат дроби иначе:

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{17}{5}\right)^2=\frac{289}{25}=11\frac{14}{25}, \text{ а}$$

$$\left(1\frac{1}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}=1\frac{11}{25}.$$

И учащиеся должны этот способ освоить.

И, наконец, важно, что здесь считать квадраты дробей вовсе не обязательно, так как по формуле «разности квадратов»:

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2-\left(1\frac{1}{5}\right)^2=\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3\frac{2}{5}+1\frac{1}{5}\right)^2=$$

$\frac{11}{5}\cdot\frac{23}{5}=\frac{253}{25}=10\frac{3}{25}$. Ответ: $10\frac{3}{25}$.

Анализируя приведённые в этом примере ошибки, мы не просто их исправляем, но ещё и даём рецепты оптимизации вычислений. Вряд ли ученик получил бы аналогичный эффект, если бы ему просто было показано «идеальное» решение.

2. Решить уравнение: $(x-1)(x+3)=0$.

«Решение». Перемножив скобки, получим квадратное уравнение:

$$x^2+2x-3=0.$$

Найдём его корни:

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2$; $x_1=1$ и $x_2=-3$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-3$.

Комментарии. Формально решение абсолютно верное, но признать его приемлемым нельзя, ведь исходное уравнение решается устно! Здесь в левой части стоит произведение двух скобок. Оно равно нулю, когда или $x-1=0$, или $x+3=0$. Отсюда сразу находятся $x_1=1$, $x_2=-3$.

Мы же, перемножив скобки, усложнили себе задачу. В данном случае такая «двойная работа», хотя и огорчительна, но не так страшна. Иное дело, например, уравнение

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=0.$$

Его корни легко находятся:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ и } \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

А если переходить к квадратному уравнению, то получим:

$$x^2+\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3}{6}x-\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{2}}=0.$$

Быстро получить корни этого уравнения вряд ли возможно...

3. Решить неравенство: $|4-x|<2$.

«Решение». Выражение под модулем равно нулю при $x=4$. Применяя метод интервалов, рассматриваем неравенство на двух промежутках:

а) $\begin{cases} x\ge 4, \\ 4-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4;+\infty)$;

б) $\begin{cases} x<4, \\ -4+x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;4)$.

Объединяем получившиеся решения. Ответ: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Комментарии. Выражение под модулем в самом деле равно нулю при $x=4$. Но почему-то считается, что справа от точки $x=4$ это выражение положительно, а слева — отрицательно. Это довольно распространённое заблуждение. Часто решающий задачу даже не задумывается над этим: справа «плюс»; слева — «минус». На самом деле в данном случае в выражении $4-x$ перед *x* стоит отрицательный коэффициент, поэтому справа от 4 выражение будет отрицательно, а слева — положительно. Значит:

а) $\begin{cases} x\ge 4, \\ -4+x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4;6)$;

б) $\begin{cases} x<4, \\ 4-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;4)$.

И итоговый ответ: $x\in(2;6)$.

Но, конечно, решать такую задачу методом интервалов явно не стоит. Гораздо проще поступить так:

$$|4-x|<2 \Leftrightarrow -2<4-x<2 \Leftrightarrow x\in(2;6).$$

Или же можно воспользоваться «переводом» формулировки задачи на язык геометрии: «найти те значения *x*, при которых расстояние от точки x до точки 4 будет меньше 2». Очевидно, что это значения *x*, лежащие между 2 и 6.

Подчеркнём, что предложенное выше неверное решение, по сути дела, явилось лишь «поводом» для разговора! Очень важно после его разбора и исправления всех ошибок привести более рациональное второе решение и очень эффектное третье.

4. При каких значениях параметра *a* уравнение $ax^2+4x-2=0$ имеет два различных корня?

«Решение». Условие положительности дискриминанта даёт: $D=16+8a>0$. Поэтому $a>-2$. Ответ: $a\in(-2;+\infty)$.

Комментарии. Упущен один важный нюанс: мы сразу, без раздумий, рассматриваем это уравнение как квадратное. А ведь при $a=0$ оно перестаёт быть таковым! И тогда говорить о каком-либо дискриминанте просто бессмысленно. И, разумеется, при $a=0$ наше уравнение имеет только одно решение:

$$\left(x=\frac{1}{2}\right).$$

Поэтому ответ в этой задаче:

$$a\in(-2;0)\cup(0;+\infty).$$

5. В уравнении

$$x^2+(3k-3)x+k^2-5k+22=0$$

определить число *k* так, чтобы один из корней был вдвое больше другого.

«Решение». Если данное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то имеют место соотношения (первое получено из условия, а два других — из теоремы Виета):

$x_1=2x_2$; $x_1+x_2=3-3k$;

$x_1\cdot x_2=k^2-5k+22$.

Отсюда следует

$3x_2=3-3k$; $2x_2^2=k^2-5k+22$,

а поэтому $2(1-k)^2=k^2-5k+22$.

Решая это уравнение относительно k, получим:

$k^2+k-20=0$; $k_1=4$, $k_2=-5$.

Ответ: $k_1=4$, $k_2=-5$.

Комментарии. Найти ошибку в этом решении весьма непросто. Прежде всего, отметим одну неточность: использование теоремы Виета возможно, только если данное уравнение имеет корни, т.е. обычно в таких случаях необходимой является проверка условия $D\ge 0$. Это условие приводит к неравенству: $5k^2+2k-79\ge 0$. Легко убедиться, что и при $k=4$, и при $k=-5$ это неравенство выполняется.

Заметим, что можно было бы обойтись и без этой проверки, если бы мы, подставив полученные значения *k*, получили корни (при $k=4$ это $x_1=-6$; $x_2=-3$, а при $k=-5$: $x_1=12$; $x_2=6$). Мы получили корни в явном виде, а значит, они существуют!

Так или иначе, в изложении решения существование корней должно быть как-то обосновано. Просто обойти молчанием этот вопрос невозможно.

Но самое интересное в другом. Прочитаем внимательно формулировку задачи: «один из корней вдвое больше другого». Но ведь у нас при $k=4$ получается, что $(-6)=2\cdot(-3)$, т.е. число (-6) получилось «вдвое больше» числа (-3). Но ведь это не так! Число (-6) даже меньше числа (-3). Обычно этот парадокс ставит решающего задачу в тупик. Ошибки-то в решении как будто бы нет, но результат странный. А разгадка проста: формулировка «число a в n раз больше числа b» вовсе не эквивалентна формуле $a=n\cdot b$. Мы можем сравнивать таким образом числа, только если оба они *положительны*! То есть формулировка «число *a* в *n* раз больше числа b» означает: $a=n\cdot b$, $a>0$, $b>0$ (легко убедиться, что достаточно одного из двух последних неравенств). А поэтому наше решение следовало бы дополнить неравенствами $x_2>0$ и $x_1>0$ (достаточно одного из них).

Таким образом, ответ в этой задаче только один: $k=-5$ — ведь только тогда оба корня положительны. Заметим, что подобная ошибка в задачах такого типа встречается у составителей многих сборников задач.

Резюмируя, ещё раз подчеркнём достоинства подобных методик:

1. Интерес у ученика к излагаемому материалу сохраняется даже тогда, когда ему кажется, что «он это знает».

2. В результате подробного анализа какого-либо дефекта в определении или в теореме учащиеся концентрируются на этом пункте, их знание становится осознанным. Если бы сразу была дана верная формулировка, часть информации была бы потеряна.

3. Класс постоянно держится «в тонусе»: ученики привыкают не принимать «на веру» ни одну из фраз учителя. Воспитывается необходимый самоконтроль и критическое мышление.

4. У школьника вырабатываются необходимые навыки и алгоритмы поиска ошибок и недочётов в его собственных рассуждениях и выкладках.

5. Учащемуся предоставляется возможность учиться на чужих ошибках: гораздо лучше проанализировать и понять, что кто-то сделал плохо, и самому этого избежать, чем «наступать на те же грабли», на которые уже многие наступили.

6. Важную роль играет тренировка процедуры поиска ошибок в подготовке будущих учителей. Это, во-первых, повышает их математическую культуру, а во-вторых, вырабатывает навыки и алгоритмы проверки решений, что является одной из важных компонент их будущей профессиональной деятельности.

❑