О приобщении школьников к математическому творчеству[1]

Михаил Иванович Зайкин,
зав. кафедрой теории и методики обучения математике Арзамасского государственного педагогического института им. А.П. Гайдара

• задачные технологии обучения • цепочка задач • структурная модель • учебные цели •

Задачные технологии обучения в математическом образовании школьников сегодня есть, по сути, главное направление развития методической мысли. Развивая его, следует помнить, что в обучении всё же очень много зависящего от внешних условий, много субъективного, немало и ситуативного, возникающего по ряду причин или обстоятельств.

Задачная конструкция вовсе не панацея от всех бед. Она всего лишь идеальная модель образовательного процесса, и как всякая модель лишь односторонне имитирует реальный образовательный процесс.

Для того чтобы она стала эффективной, в неё необходимо «вдохнуть жизнь», наполнить человеческими измерениями. Мотивы, цели, установки, ожидания должны быть выражены не в искусственной или отвлечённой форме, а в естественной, легко воспринимаемой каждым ребёнком.

Другими словами, задачная конструкция эффективным средством обучения станет лишь в руках искусного педагога. А гуманизация обучения математике, видимо, и будет заключаться в том, чтобы в задачной конструкции, как главном средстве организации познавательной деятельности детей, представить как можно более полно духовное педагогическое начало.

Наиболее употребительными в методических изысканиях и практике математического образования задачными конструкциями являются системы задач[2]. Ниже речь пойдёт о других задачных конструкциях — цепочках задач, получающих всё большее распространение в работе с одарёнными школьниками[3].

Дефиниция

Развивающаяся цепочка взаимосвязанных задач есть такая задачная конструкция целевого назначения, постановка и решение каждой задачи которой (за исключением первой) порождаются решением предыдущих задач. Её обобщённая структурная модель представлена на схеме (рис. 1).

Характер взаимосвязи задач в цепочке может быть различным. В самом общем смысле эту взаимосвязь можно называть взаимосвязью порождения.

Отличительные черты

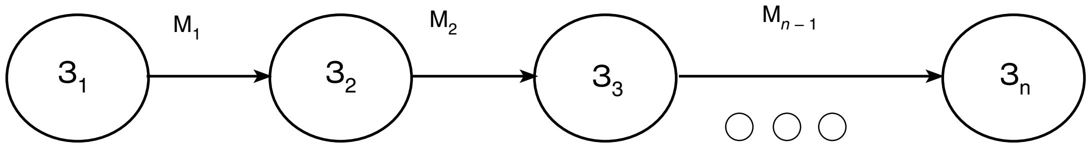
1. Наличие внутренней мотивации

Это весьма существенное и достаточно деликатное отличие развивающейся цепочки

[1] Статья подготовлена по результатам научных исследований в рамках Федерального задания Минобрнауки России, проект И120216131020 «Структурно-семантический и функциональный анализ задачных конструкций, используемых в обучении математике».

[2] **Дорофеев Г.В.** О составлении циклов взаимосвязанных задач // Математика в школе. 1983. № 6. С. 34–39.

[3] **Зайкин М.И.** От задания к заданию — в глубину познания. Опыт приобщения к математическому творчеству. Арзамас: АГПИ, 2010. 148 с.



Где: $З_i$ (i = 1, 2, … n) — совокупности взаимосвязанных задач,
$М_j$ (j = 1, 2, … n – 1) — совокупности мотивов, обуславливающих их постановку и решение.

Рис.1. Схема обобщённой структурной модели развивающейся цепочки взаимосвязанных задач

взаимосвязанных задач от других задачных конструкций целевого назначения, употребляемых в практике математического образования школьников.

Учебные мотивы должны быть внутренними, вызывающими естественное желание ученика: узнать, найти, построить, составить, описать, сформулировать, доказать и т.п. Они должны быть предметными, связанными с конкретной математической закономерностью, числовой или геометрической особенностью, различными формами её проявлениями, выражения (записи). Им должна быть свойственна целость, обеспечивающая единство общего замысла (рисунка) всей деятельности по решению совокупности задач. Наконец, они должны быть действенными, т.е. вызывающими стремление к деятельности по удовлетворению возникших познавательных потребностей. Действенность мотивов обеспечивается рядом условий, важнейшим среди которых в данном случае является посильность решения задачи для школьника.

Развивающейся цепочке взаимосвязанных задач свойственна своеобразная самомотивация познавательной деятельности. Последующие действия зарождаются непосредственно при выполнении самой деятельности. В процессе формулировки последующего задания мотив переходит в цель деятельности.

При обеспечении таких условий цепочки взаимосвязанных заданий могут по-настоящему и надолго увлечь школьников решением и вести их по ступеням познания к открытию математических истин, а, может быть, даже и к созданию небольших теорий. Они обеспечивают возникновение атмосферы творческой поисковой деятельности. Уделом учителя становится поддержание накала разыгравшихся страстей, направление замыслов и устремлений детей в нужное русло, одухотворение познавательного процесса, насыщение его истинными человеческими ценностями.

2. Открытость структуры

Структурная модель развивающейся цепочки взаимосвязанных задач, представленная на рис. 1, условна, поскольку в реальном познавательном процессе и число, и формулировки порождённых задач могут значительно отличаться от предполагаемых. Некоторые задачи решающим могут не ставиться вообще, а лишь предвосхищаться или оцениваться им как тривиальные. Напротив, могут быть поставлены и решены задачи, которые изначально не предполагались или даже не намечались к решению, поскольку их содержание не было известно. Но в процессе решения возникла неожиданная гипотеза, позволившая сформулировать новую задачу и получить интересные результаты. В свою очередь эта задача может породить многие другие, позволяющие углубить и расширить представления о некой области математического знания.

3. Продуктивность деятельности

Продуктивность в образовании, как известно, понимается как обеспечение чёткой нацеленности на реальный, конкретный конечный продукт, создаваемый учеником в процессе его деятельности. Ещё С.Л. Рубинштейн отмечал, что человек, сделавший что-нибудь значительное, становится в известном смысле другим человеком.Чтобы сделать что-нибудь значительное, нужно иметь внутренние возможности для этого.

Однако эти возможности и потенции человека отмирают, если они не реализуются, и лишь по мере того, как личность предметно, субъектно реализуется в продуктах своего труда, она через них растёт и формируется[4].

В контексте деятельностного подхода к обучению представляется важным определение видов учебной продуктивной математической деятельности, результатов (продуктов) деятельности и методических средств, с помощью которых становится возможным вовлечение школьников в продуктивную деятельность.

В самом первом приближении применительно к обсуждаемому вопросу сказанное ориентирует на постановку задач, предполагающих:

- придумывание примеров математических объектов;
- составление аналогичных задач;
- формулирование гипотез;
- моделирование объектов или процессов;
- отыскание способов доказательства;
- формулирование вопросов;
- постановку проблем;
- отыскание различных способов решения (доказательства);
- построение теорий (локальных)[5].

4. Индуктивный ход мысли

В учебных целях чрезвычайно важно придавать поисковой деятельности детей индуктивный характер, показывая путь естественного «сотворения» математического знания[6]. Он более соответствует познавательным возможностям учащихся начального, среднего, да и старшего школьного звена, позволяет экспериментировать на математическом материале, замечать числовые или геометрические особенности, обнаруживать закономерности, совершать маленькие «открытия».

Индуктивный путь познания, конечно же, предполагает наличие достаточного времени, неторопливости в рассуждениях, неспешности в выводах. Обобщение должно планомерно «вызревать» в сознании активно действующего субъекта, страстно желающего его совершить. Оно должно стать естественным итогом предшествующего хода мысли, закономерным результатом учебного познания, его продуктом. Можно не сомневаться: потраченное время окупится с лихвой качественными сдвигами в интеллектуальном развитии обучаемого.

Для индуктивного познания необходимы вполне осязаемые ориентиры, задающие направление поисковой деятельности. В качестве них могут выступать параметры изменения задачной ситуации: варьирования числовых данных, изменения условия задачи, преобразования её требования и т.п. На первых порах они могут задаваться комментариями учителя или самой последовательностью задач в цепочке. В идеале они должны осознаваться самим решающим задачи.

5. Заданность общей логики познавательного процесса

Допуская тактику «свободного блуждания по полю исследования», методика развивающейся цепочки взаимосвязанных задач устанавливает своеобразные «коридоры» этого блуждания, во-первых, для того чтобы не заблудиться, вообще, и не уйти в никуда, потеряв всякий интерес к познавательной деятельности, а во-вторых, чтобы обеспечить возможность прохождения всех основных этапов на пути получения итогового знания.

На достижение этой цели в первую очередь ориентирована совокупность мотивов. Этому же служит и общая логика познавательного процесса, отражающая видовое своеобразие задачной цепочки. Она определяет также цикличность в построении поисковой деятельности и самой задачной конструкции.

Например, общая логика познавательного процесса в приведённой ниже в качестве иллюстрирующего примера развивающейся цепочки взаимосвязанных задач «Необычное сокращение» отражена на схеме (рис. 2).

[4] **Рубинштейн С.Л.** Основы общей психологии. СПб.: Питер, 1999.

[5] Хрестоматия по методике математики: Обучение через задачи. Т. 1 / Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина. Арзамас: АГПИ, 2005. 300 с.

[6] **Шень А.** Математическая индукция. 3-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2007. 32 с.

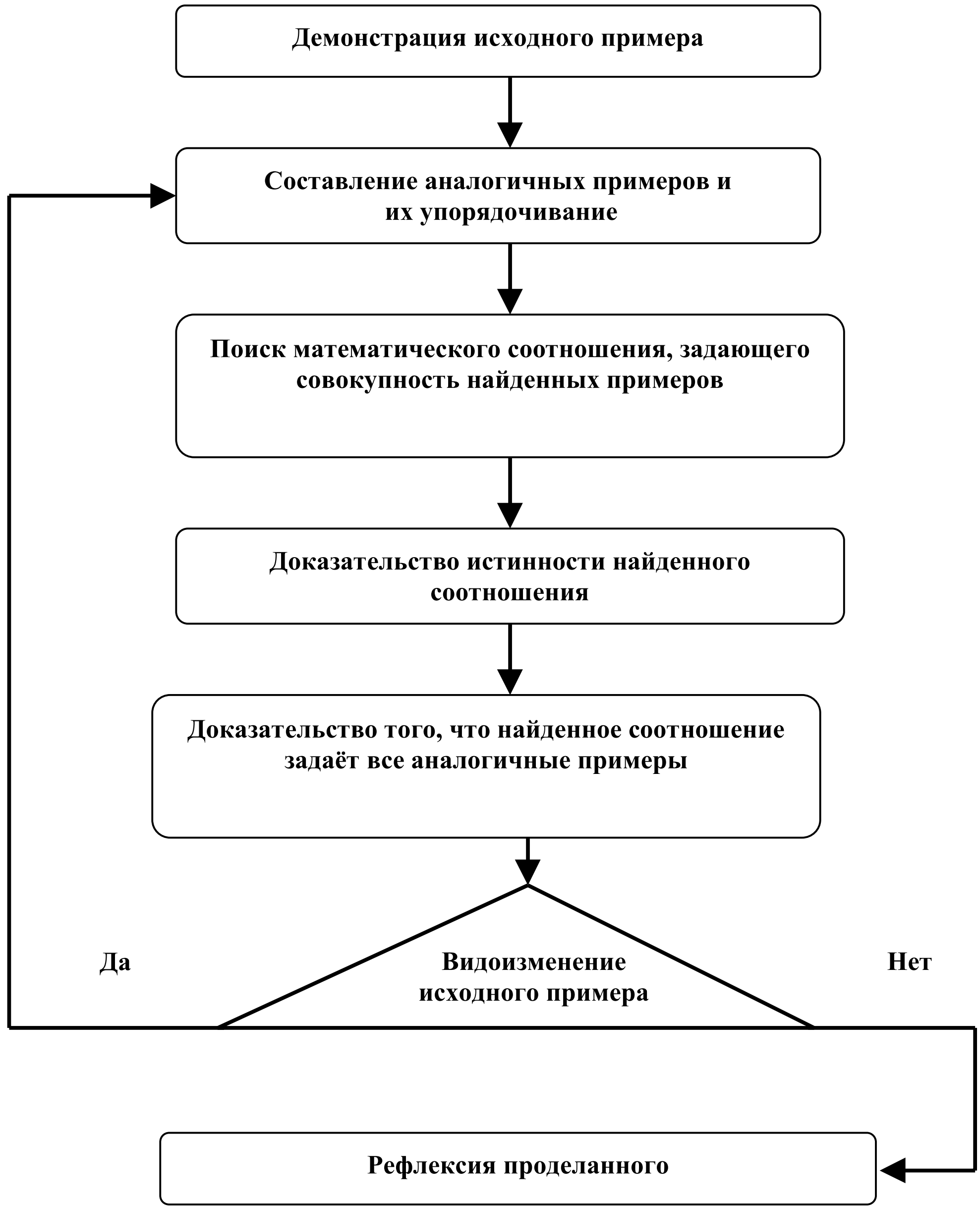


Рис. 2. Схема общей логики познавательного процесса в РЦВЗ вида «Необычное сокращение»

Исходная задача

Исходная задача в развивающейся цепочке взаимосвязанных задач выполняет особую миссию. Она несёт в себе начальные, быть может не осознаваемые во всей полноте, мотивы предстоящей деятельности, в снятом виде задаёт общее направление учебного познания, является исходной клеточкой, прообразом тех обобщений, ради которых эта цепочка задач задействуется в учебном процессе.

Понятно, что такую миссию может выполнить далеко не всякая задача. Более подходят те, которым свойственен потенциал возможных продолжений. Каждая такая задача — одна из серии аналогичных задач, являющихся конкретным проявлением общей математической закономерности, которую предстоит установить, осознать, выразить математическим языком, испытать.

Но прежде всего такая задача должна быть принята учеником, а значит, обладать развивающей, гуманитарной, прикладной или иной ценностью, с его точки зрения.

Наконец, важно и наличие у задачи естественного параметра, которому можно следовать в поисковых начинаниях. Видимость этого параметра облегчает процесс принятия решающим задачи, создаёт условия, благоприятствующие выбору направления исследования, осуществлению начальных шагов поисковой деятельности. Для менее способных к математике школьников он, как нить Ариадны, указывает спасительный путь в лабиринте сомнений и догадок. Более способным к математике детям он помогает в выборе следующего шага, то есть развивает важнейшее для математика умение определять значимые факты и перспективные направления исследования.

Пример

В качестве иллюстрации к сказанному приведём пример развивающейся цепочки взаимосвязанных задач «Необычное сокращение», используемой нами в работе с учащимися лицейских классов, снабдив её дополнительными комментариями, которые полезно знать учителю математики.

Напомним, что при сокращении дробных выражений числитель и знаменатель делят на их общий делитель.

Сокращая, например, дробь

$$\frac{2^5+96}{8+6^3},$$

в её числителе и знаменателе выделяют общий множитель 2^3, на который и производят сокращение:

$$\frac{2^5+88}{8+6^3}=\frac{2^3\cdot 2^2+2^3\cdot 11}{2^3+2^3\cdot 3^3}=\frac{2^3(2^2+11)}{2^3(1+3^3)}=\frac{2^2+11}{1+3^3}=\frac{15}{28}$$

Однако в некоторых случаях сокращение можно выполнять не по этому правилу, а иначе, например, посредством зачёркивания одинаковых показателей степеней чисел, записанных в числителе и знаменателе числового выражения.

***Задача* 1.** *Проверить, верно ли выполнено сокращение:*

$$\frac{3^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}=\frac{3+1}{3+2}. \qquad (1)$$

Удивительно, но факт — сокращение дробного выражения путём зачёркивания общего для всех чисел, входящих в числитель и знаменатель выражения, показателя степени оставило значение дроби прежним. В этом легко убедиться.

Преобразуем левую часть:

$$\frac{3^3+1^3}{3^3+2^3}=\frac{27+1}{27+8}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}.$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$\frac{3+1}{3+2}=\frac{4}{5}.$$

Левая и правая части оказались одинаковыми, значит сокращение выполнено верно.

Закономерно возникает вопрос: всегда ли таким образом можно сокращать дробь?

***Задача* 2.** *Верно ли, что:*

$$\text{а) } \frac{3^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}=\frac{3+1}{5+2};$$

$$\text{б) } \frac{5^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}=\frac{5+1}{5+2};$$

$$\text{в) } \frac{4^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}=\frac{4+1}{3+2}?$$

Ответ отрицательный — во всех трёх случаях такое сокращение дроби приводит к неверному результату.

Действительно:

$$\frac{28}{132}\neq\frac{4}{7}; \quad \text{б) } \frac{126}{132}\neq\frac{6}{7}; \quad \text{в) } \frac{65}{32}\neq\frac{5}{5}.$$

Получается, что пример (1) — особенный. А может быть он вообще единственный?

***Задача* 3.** *Придумать аналогичные примеры сокращения дробей «не по правилам».*

Поиск аналогичных примеров сокращения «не по правилам» может происходить по-разному. Чаще всего сначала используют стратегию случайного подбора, то есть делают «на удачу» несколько проб:

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+2^3}=\frac{2+1}{2+2}$$ — неверно,

$$\frac{3^3+1^3}{3^3+3^3}=\frac{3+1}{3+3}$$ — неверно,

$$\frac{4^3+2^3}{4^3+3^3}=\frac{4+2}{4+3}$$ — неверно и т.д.

Можно попытаться применить стратегию полного перебора вариантов:

$$\frac{1^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{1+1}{1+1},\quad \frac{1^3+1^3}{1^3+2^3}\neq\frac{1+1}{1+2},\quad \frac{1^3+1^3}{1^3+3^3}\neq\frac{1+1}{1+3}\ \text{и т.д.};$$

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+1^3}=\frac{2+1}{2+1},\quad \frac{2^3+1^3}{2^3+2^3}\neq\frac{2+1}{2+2},\quad \frac{2^3+1^3}{2^3+3^3}\neq\frac{2+1}{2+3},\quad \frac{2^3+1^3}{2^3+4^3}\neq\frac{2+1}{2+4}\ \text{и т.д.};$$

$$\frac{2^3+2^3}{2^3+2^3}=\frac{2+2}{2+2},\quad \frac{2^3+2^3}{2^3+3^3}\neq\frac{2+2}{2+3},\quad \frac{2^3+2^3}{2^3+4^3}\neq\frac{2+2}{2+4}\ \text{и т.д.};$$

$$\frac{3^3+1^3}{3^3+1^3}=\frac{3+1}{3+1},\quad \frac{3^3+1^3}{3^3+2^3}=\frac{3+1}{3+2},\quad \frac{3^3+1^3}{3^3+3^3}\neq\frac{3+1}{3+3},\quad \frac{3^3+1^3}{3^3+4^3}\neq\frac{3+1}{3+4}\ \text{и т.д.}$$

Несмотря на определённый интерес, такая стратегия быстро наскучивает — она неэффективна. Наблюдение за знаком разности левой и правой частей получаемых равенств позволяет существенно уменьшить число рассматриваемых вариантов.

Действительно:

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+1^3}=\frac{9}{9}=1,\quad \frac{2+1}{2+1}=\frac{3}{3}=1,\quad 1-1=0;$$

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+2^3}=\frac{9}{16},\quad \frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4},\quad \frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16};$$

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+3^3}=\frac{9}{35},\quad \frac{2+1}{2+3}=\frac{3}{5},\quad \frac{3}{5}-\frac{9}{35}=\frac{12}{35}.$$

Как видим, разность левой и правой частей получаемых равенств увеличивается:

$$0<\frac{3}{16}<\frac{12}{35},$$

значит, дальнейшее составление равенств в данной серии — бесперспективное занятие.

В результате реализации той или иной поисковой стратегии появляется совокупность аналогичных примеров сокращений «не по правилам»:

$$\frac{2^3+1^3}{2^3+1^3}=\frac{2+1}{2+1},\quad \frac{3^3+1^3}{3^3+2^3}=\frac{3+1}{3+2},\quad \frac{4^3+1^3}{4^3+3^3}=\frac{4+1}{4+3},\quad \frac{5^3+1^3}{5^3+4^3}=\frac{5+1}{5+4}\ \text{и т.д.} \tag{3}$$

Замечаем, что слева в обеих частях равенств и в числителе, и в знаменателе записаны сначала двойки, затем тройки, потом четвёрки, пятёрки. Возникает предположение, что таких равенств можно составить много, даже бесконечно много.

Напрашивается записать общий вид таких равенств.

Задача 4. *Записать математическое соотношение, задающее примеры сокращения «не по правилам», аналогичные* (3).

Записать такое соотношение можно, если заметить, что первое слагаемое в числителе и знаменателе (оно одинаковое) можно обозначить буквой n, второе слагаемое в числителе — всегда 1, а второе слагаемое в знаменателе будет равняться (n — 1).

Имеем:

$$\frac{n^3+1^3}{n^3+(n-1)^3}=\frac{n+1}{n+(n-1)}, \tag{4}$$

где n — произвольное натуральное число.

Придавая n конкретные значения, будем получать интересующие нас равенства.

Например, при $n = 7$, получим равенство:

$$\frac{7^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{7^{\cancel{3}}+6^{\cancel{3}}}=\frac{7+1}{7+6},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться:

$$\frac{7^3+1^3}{7^3+6^3}=\frac{344}{559}=\frac{8}{13},$$

$$\frac{7+1}{7+6}=\frac{8}{13}.$$

При $n = 101$ получим равенство:

$$\frac{101^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{101^{\cancel{3}}+100^{\cancel{3}}}=\frac{101+1}{101+100},$$

в справедливости которого также нетрудно убедиться, вычислив значения его левой и правой чисти:

$$\frac{101^3+1^3}{101^3+100^3}=\frac{1030301+1}{1030301+1000000}=\frac{1030302}{2030301}=$$

$$=\frac{10101\cdot 102}{10101\cdot 201}=\frac{102}{201}; \qquad \frac{101+1}{101+100}=\frac{102}{201}.$$

Несмотря на справедливость отдельных равенств, истинность соотношения (4) должна быть установлена посредством доказательства.

***Задача* 5.** *Доказать равенство* (4).

Доказать это равенство можно, например, так.

Раскладывая на множители по формуле суммы кубов двух чисел числитель и знаменатель левой части равенства, получим:

$$\frac{n^3+1^3}{n^3+(n-1)^3}=$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+(n-1))(n^2-n(n-1)+(n-1)^2}=$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+(n-1))(n^2-n^2+n+n^2-2n+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+(n-1))(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{n+1}{n+(n-1)}.$$

Значит, равенство (4) верно при любых натуральных значениях n.

Теперь уже можно уверенно сказать, что примеров сокращения дробных выражений «не по правилам», аналогичных примерам (3), можно составить сколько угодно. Но может быть, есть ещё примеры такого же сокращения, неучтённые соотношением (4)?

Действительно есть, например:

$$\frac{5^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}=\frac{5+2}{5+3},$$

$$\frac{6^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{6^{\cancel{3}}+4^{\cancel{3}}}=\frac{6+2}{6+4}, \qquad (5)$$

$$\frac{7^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{7^{\cancel{3}}+5^{\cancel{3}}}=\frac{7+2}{7+5} \text{ и др.}$$

***Задача* 6.** *Проверить истинность равенств* (5) *и продолжить приведённый их перечень.*

Выполняя преобразования, будем иметь:

$$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{125+8}{125+27}=\frac{133}{152}=\frac{19\cdot 7}{19\cdot 8}=\frac{7}{8}=\frac{5+2}{5+3};$$

$$\frac{6^3+2^3}{6^3+4^3}=\frac{216+8}{216+64}=\frac{224}{280}=\frac{28\cdot 8}{28\cdot 10}=\frac{8}{10}=\frac{6+2}{6+4};$$

$$\frac{7^3+2^3}{7^3+5^3}=\frac{343+8}{343+125}=\frac{351}{468}=\frac{39\cdot 9}{39\cdot 12}=\frac{9}{12}=\frac{7+2}{7+5}.$$

Как видим, все равенства (5) верные.

Другими примерами равенств, аналогичных им, могут быть:

$$\frac{8^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{8^{\cancel{3}}+6^{\cancel{3}}}=\frac{8+2}{8+6},$$

$$\frac{9^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{9^{\cancel{3}}+7^{\cancel{3}}}=\frac{9+2}{9+7}, \qquad (6)$$

$$\frac{10^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{10^{\cancel{3}}+8^{\cancel{3}}}=\frac{10+2}{10+8} \text{ и др.}$$

Единообразие записи частных случаев наталкивает мысль на обобщение.

***Задача* 7.** *Записать математическое соотношение, задающее примеры сокращения «не по правилам», аналогичные* (5) *и* (6).

Записать такое соотношение можно, если заметить, что первое слагаемое в числителе и знаменателе (оно одинаковое) можно обозначить буквой n, второе слагаемое в числителе — всегда 2, а второе слагаемое в знаменателе будет равняться $(n - 2)$.

Имеем:

$$\frac{n^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{n^{\cancel{3}}+(n-2)^{\cancel{3}}}=\frac{n+2}{n+(n-2)}, \quad (7)$$

где n — произвольное натуральное число.

Придавая n конкретные значения, будем получать интересующие нас равенства, например, при $n = 11$, получим равенство:

$$\frac{11^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}}{11^{\cancel{3}}+9^{\cancel{3}}}=\frac{11+2}{11+9},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться:

$$\frac{11^3+2^3}{11^3+9^3}=\frac{1339}{2060}=\frac{103\cdot 13}{103\cdot 20}=\frac{13}{20}=\frac{11+2}{11+9}.$$

Истинность равенства (7) для любого натурального числа n должна быть установлена путём доказательства.

***Задача* 8.** *Доказать равенство* (7).

Доказать это равенство можно тем же способом, что и равенство (4).

Раскладывая на множители по формуле суммы кубов двух чисел числитель и знаменатель левой части равенства, получим:

$$\frac{n^3+2^3}{n^3+(n-2)^3}=$$

$$=\frac{(n+2)(n^2-2n+4)}{(n+(n-2))(n^2-n(n-2)+(n-2)^2}=$$

$$=\frac{(n+2)(n^2-2n+4)}{(n+(n-2))(n^2-n^2+2n+n^2-4n+4)}=$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-2n+4)}{(n+(n-1))(n^2-2n+4)}=$$

$$=\frac{n+2}{n+(n-2)}.$$

Значит, равенство (7) верно при любых натуральных значениях n.

Теперь уже можно уверенно сказать и о том, что и примеров сокращения дробных выражений «не по правилам», аналогичных примерам (5) и (6), можно составить сколько угодно.

Дальше, очевидно, можно привести примеры, в которых на месте числа 1 (как в (3)) или на месте числа 2 (как в (5) и (6)) будет находиться число 3.

***Задача* 9.** *Привести примеры сокращения «не по правилам» со вторым слагаемым в числителе и знаменателе, равным* 3**,** *и проверить их истинность.*

Такими примерами могут быть:

$$\frac{6^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}{6^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}=\frac{6+3}{6+3},\qquad \frac{7^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}{7^{\cancel{3}}+4^{\cancel{3}}}=\frac{7+3}{7+4},\qquad \frac{8^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}{8^{\cancel{3}}+5^{\cancel{3}}}=\frac{8+3}{8+5}\ \text{и др.} \quad (8)$$

Все они верные. Действительно:

$$\frac{6^3+3^3}{6^3+3^3}=1=\frac{6+3}{6+3};$$

$$\frac{7^3+3^3}{7^3+4^3}=\frac{343+27}{343+64}=\frac{370}{407}=\frac{37\cdot 10}{37\cdot 11}=\frac{10}{11}=\frac{7+3}{7+4};$$

$$\frac{8^3+3^3}{8^3+5^3}=\frac{512+27}{512+125}=\frac{539}{637}=\frac{49\cdot 11}{49\cdot 13}=\frac{11}{13}=\frac{8+3}{8+5}.$$

Самой собой напрашивается сделать обобщение для приведённых частных случаев.

***Задача* 10.** *Записать математическое соотношение, задающее примеры сокращения «не по правилам», аналогичные* (8).

Очевидно, таким соотношением будет

$$\frac{n^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}{n^{\cancel{3}}+(n-3)^{\cancel{3}}}=\frac{n+3}{n+(n-3)}. \quad (9)$$

***Задача* 11.** *Доказать равенство* (9).

(Полезно поупражняться в доказательстве!)

Теперь понятно, что в качестве второго слагаемого в числителе и знаменателе дробного выражения можно брать не только 1, 2, 3, но и вообще любое натуральное число *k*.

Напрашивается ещё одно обобщение.

***Задача* 12.** *Записать математическое соотношение, задающее вообще все примеры сокращения «не по правилам», аналогичные рассмотренным.*

Очевидно, таким соотношением будет

$$\frac{n^3+k^3}{n^3+(n-k)^3} = \frac{n+k}{n+(n-k)}, \qquad (10)$$

где: *n* и *k* — натуральные числа.

Его необходимо доказать.

***Задача* 13.** *Доказать равенство* (10).

Доказать это равенство можно тем же приёмом, что и равенства (4) и (7).

А именно, раскладывая на множители по формуле суммы кубов двух чисел числитель и знаменатель левой части равенства, получим:

$$\frac{n^3+k^3}{n^3+(n-k)^3} =$$

$$= \frac{(n+k)(n^2-kn+k^2)}{(n+(n-k))(n^2-n(n-k)+(n-k)^2} =$$

$$= \frac{(n+k)(n^2-kn+k^2)}{(n+(n-k))(n^2-n^2+kn+n^2-2kn+k^2)} =$$

$$= \frac{(n+k)(n^2-kn+k^2)}{(n+(n-k))(n^2-kn+k^2)} =$$

$$= \frac{n+k}{n+(n-k)}.$$

Значит, равенство (10) верно при любых натуральных значениях *n и k*.

Возьмём, к примеру, *n* = 10 и *k* = 4, получим равенство:

$$\frac{10^3+4^3}{10^3+6^3} = \frac{10+4}{10+6},$$

в истинности которого можно лишний раз убедиться, выполнив необходимые вычисления:

$$\frac{10^3+4^3}{10^3+6^3} = \frac{1000+64}{1000+216} = \frac{1064}{1216} = \frac{76\cdot 14}{76\cdot 16} = \frac{14}{16} = \frac{10+4}{10+6}.$$

Можно заметить также, что при всех натуральных значениях $k < n$ в числителе и в знаменателе сокращаемой дроби будет записана сумма кубов натуральных чисел; при $k > n$ числитель сокращаемой дроби будет представлять собой сумму кубов, а знаменатель — разность кубов двух натуральных чисел; при $k = n$ всякий раз будет получаться тривиальное числовое равенство.

Приведём примеры:

1) при *n = 5 и k* = 3 ($k < n$) получаем:

$$\frac{5^3+3^3}{5^3+2^3} = \frac{5+3}{5+2};$$

2) при *n = 3 и k* = 5 ($k > n$) получаем:

$$\frac{5^3+3^3}{5^3-2^3} = \frac{5+3}{5-2};$$

3) при *n = 3 и k* = 3 ($k = n$) получаем:

$$\frac{3^3+3^3}{3^3} = \frac{3+3}{3}.$$

Получив математическое соотношение (10), задающее все рассмотренные примеры сокращения «не по правилам», аналогичные исходному (1), важно убедиться в том, что других аналогичных примеров сокращения, не охватываемых этим соотношением, больше нет.

***Задача* 14.** *Доказать, что других равенств, аналогичных* (1), *не существует*.

Доказательство можно провести по-разному, например, так.

Предположим, что имеет место

$$\frac{n^3+k^3}{n^3+m^3} = \frac{n+k}{n+m} \quad (m \neq k), \ (11)$$

или

$$\frac{n^3+k^3}{n^3+m^3} - \frac{n+k}{n+m} = 0.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим:

$$\frac{n^3+k^3-(n+k)(n^2-nm+m^2)}{n^3+m^3} = 0.$$

Учитывая, что $n^3 + m^3 \neq 0$, будем иметь:

$$n^3 + k^3 - (n + k)(n^2 - nm + m^2) = 0.$$

Разделив почленно на $(n + k) \neq 0$, получим:

$$n^2 - nk + k^2 - n^2 + nm - m^2 = 0.$$

Откуда

$$m^2 - k^2 = nm - nk$$

или

$$(m - k)(m + k) = n(m - k).$$

Разделив почленно на $(m - k) \neq 0$, найдём, что

$$m = n - k,$$

а это значит, что равенство (11) будет иметь знакомый вид:

$$\frac{n^3+k^3}{n^3+(n-k)^3} = \frac{n+k}{n+(n-k)}.$$

Получили всё то же равенство (10). Значит, других аналогичных примеров сокращения дробей «не по правилам» нет.

Но, если попытаться немного изменить вид самого первого из рассмотренных примеров, и посмотреть, сохранится ли возможность сокращения «не по правилам»?

Вернёмся к исходному равенству (1):

$$\frac{3^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}} = \frac{3+1}{3+2}.$$

Заменим в нём знак «плюс» в числителе обеих дробей знаком минус.

Возможно ли сокращение дробей «не по правилам» в этом случае?

***Задача* 15.** *Верно ли выполнено сокращение*

$$\frac{3^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+2^{\cancel{3}}} = \frac{3-1}{3+2}? \qquad (12)$$

Очевидно, нет.

Поскольку:

$$\frac{3^3-1^3}{3^3+2^3} = \frac{27-1}{27+8} = \frac{26}{35}, \text{ а } \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}.$$

Простая замена знака «плюс» на знак «минус» ни к чему хорошему не привела. Тогда, может быть, попытаться одновременно произвести и какие-то числовые изменения? Например, подходящим образом изменить второе слагаемое в знаменателях обеих дробей.

***Задача* 16.** *Изменить значение второго слагаемого в знаменателях обеих дробей* (12) *так, чтобы сокращение дробей «не по правилам» стало возможным, и записать полученный пример.*

Поступим так.

Запишем искомое равенство в виде:

$$\frac{3^3-1^3}{3^3+x^3} = \frac{3-1}{3+x}.$$

Замечаем, что числитель левой дроби больше числителя правой дроби в 13 раз. Значит, в таком же отношении будут находиться и знаменатели этих дробей.

Тогда:

$$3^3 + x^3 = 13(3 + x).$$

Учитывая, что $x > 0$, получаем:

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Откуда определяется единственное подходящее для рассматриваемого случая значение $x = 4$.

Искомый пример сокращения «не по правилам» будет выглядеть так:

$$\frac{3^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+4^{\cancel{3}}} = \frac{3-1}{3+4}.$$

Задача **17.** *Выполнить аналогичные изменения для всех примеров в* (3) *и записать получившиеся равенства.*

Получаем:

$$\frac{2^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{2^{\cancel{3}}+3^{\cancel{3}}}=\frac{2-1}{2+3},$$

$$\frac{3^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}+4^{\cancel{3}}}=\frac{3-1}{3+4},$$

$$\frac{4^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{4^{\cancel{3}}+5^{\cancel{3}}}=\frac{4-1}{4+5}, \qquad (13)$$

$$\frac{5^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+6^{\cancel{3}}}=\frac{5-1}{5+6} \text{ и т.д.}$$

Напрашивается сделать обобщение всех этих частных примеров.

Задача **18.** *Записать математическое соотношение, задающее примеры сокращения «не по правилам», аналогичные* (13).

Записать такое соотношение можно, если заметить, что первое слагаемое в числителе и знаменателе (оно одинаковое) можно обозначить буквой n, второе слагаемое в числителе — всегда 1, а второе слагаемое в знаменателе будет равняться (n + 1).

Имеем:

$$\frac{n^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{n^{\cancel{3}}+(n+1)^{\cancel{3}}}=\frac{n-1}{n+(n+1)}, \quad (14)$$

где n — произвольное натуральное число.

Придавая n конкретные значения, будем получать интересующие нас равенства, например, при $n = 7$, получим равенство:

$$\frac{7^{\cancel{3}}-1^{\cancel{3}}}{7^{\cancel{3}}+8^{\cancel{3}}}=\frac{7-1}{7+8},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться:

$$\frac{7^3-1^3}{7^3+8^3}=\frac{342}{855}=\frac{57\cdot 6}{57\cdot 15}=\frac{6}{15}=\frac{7-1}{7+8}.$$

Несмотря на справедливость отдельных равенств, истинность соотношения (14) должна быть установлена посредством доказательства.

Задание **19.** *Доказать равенство* (14).

Доказать это равенство можно уже применявшимся выше способом.

Раскладывая на множители по формулам разности и суммы кубов двух чисел числитель и знаменатель левой части равенства, получим:

$$\frac{n^3-1^3}{n^3+(n+1)^3}=$$

$$=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+(n+1))(n^2-n(n+1)+(n+1)^2}=$$

$$=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+(n+1))(n^2-n^2-n+n^2+2n+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+(n+1))(n^2+n+1)}=$$

$$=\frac{n-1}{n+(n+1)}.$$

Значит, равенство (14) верно при любых натуральных значениях n.

Теперь не составит особого труда приспособить для нашего случая и примеры сокращения «не по правилам», записанные в (5).

Задача **20.** *Выполнить необходимые изменения и записать полученные равенства для всех примеров, представленных в* (5).

Они будут выглядеть так:

$$\frac{5^{\cancel{3}}-2^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+7^{\cancel{3}}}=\frac{5-2}{5+7},$$

$$\frac{6^{\cancel{3}}-2^{\cancel{3}}}{6^{\cancel{3}}+8^{\cancel{3}}}=\frac{6-2}{6+8}, \quad (15)$$

$$\frac{7^{\cancel{3}}-2^{\cancel{3}}}{7^{\cancel{3}}+9^{\cancel{3}}}=\frac{7-2}{7+9}.$$

Самое время сделать обобщение.

***Задача* 21.** *Записать математическое соотношение, задающее примеры сокращения «не по правилам», аналогичные* (15).

Записать такое соотношение можно, если заметить, что первое слагаемое в числителе и знаменателе (оно одинаковое) можно обозначить буквой *n*, второе слагаемое в числителе — всегда 2, а второе слагаемое в знаменателе будет равняться (*n* + 2).

Имеем:

$$\frac{n^3-2^3}{n^3+(n+2)^3} = \frac{n-2}{n+(n+2)}, \quad (16)$$

где *n* — произвольное натуральное число.

Придавая *n* конкретные значения, будем получать интересующие нас равенства, например, при *n* = 11, получим равенство:

$$\frac{11^3-2^3}{11^3+13^3} = \frac{11-2}{11+13},$$

в справедливости которого можно убедиться простым вычислением:

$$\frac{11^3-2^3}{11^3+13^3} = \frac{1323}{3528} = \frac{147\cdot 9}{147\cdot 24} = \frac{9}{24} = \frac{11-2}{11+13}.$$

Истинность равенства (16) для любого натурального числа *n* должна быть установлена путём доказательства.

***Задача* 22.** *Доказать равенство* (16).

(Полезно поупражняться в доказательстве!)

Дальше, очевидно, можно привести примеры, в которых на месте числа 1 (как в (14)) или на месте числа 2 (как в (16)) будет записано число 3, 4, 5 и т.д.

Наконец, такие равенства можно записать и для произвольного натурального числа *к*.

Значит, возможно ещё одно обобщение.

***Задача* 23.** *Записать математическое соотношение, задающее все примеры сокращения «не по правилам», аналогичные рассмотренным выше.*

Очевидно, такое соотношение будет иметь вид:

$$\frac{n^3-k^3}{n^3+(n+k)^3} = \frac{n-k}{n+(n+k)}, \quad (17)$$

где: *n* и *k* — произвольные натуральные числа.

Теперь, разумеется, его нужно доказать.

***Задача* 24.** *Доказать равенство* (17).

Доказав (17), мы получили математическое соотношение, задающее все рассмотренные примеры сокращения «не по правилам», аналогичные исходному (13).

Теперь важно убедиться и в том, что других аналогичных примеров сокращения, не охватываемых этим соотношением, больше нет.

***Задача* 25.** *Доказать, что других примеров сокращения «не по правилам», аналогичных* (13), *не существует*.

Доказательство можно провести по-разному, например, так.

Предположим, что имеет место:

$$\frac{n^3-k^3}{n^3+m^3} = \frac{n-k}{n+m} \quad (k \neq n), \ (18)$$

или

$$\frac{n^3-k^3}{n^3+m^3} - \frac{n-k}{n+m} = 0.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим:

$$\frac{n^3-k^3-(n-k)(n^2-nm+m^2)}{n^3+m^3} = 0.$$

Учитывая, что $n^3 + m^3 \neq 0$, будем иметь:

$$n^3 - k^3 - (n - k)(n^2 - nm + m^2) = 0.$$

Разделив почленно на $(n - k) \neq 0$, получим:

$$n^2 + nk + k^2 - n^2 + nm - m^2 = 0.$$

Откуда

$$m^2 - k^2 = nm + nk$$

или

$$(m - k)\,(m + k) = n(m + k).$$

Разделив почленно на $(m + k) \neq 0$, найдём, что:

$m — k = n$ или $m = n + k$

а это значит, что равенство (18) будет иметь знакомый вид:

$$\frac{n^3 - k^3}{n^3 + (n+k)^3} = \frac{n-k}{n+(n+k)}.$$

Получили всё то же равенство (17). Значит, других аналогичных примеров равенств нет.

Анализируя возможные вариации исходного примера сокращения дробей «не по правилам», логично изучить и такой случай, когда в записи числителей и знаменателей сокращаемых дробей стоит разность кубов двух натуральных чисел.

Вновь вернёмся к исходному равенству (1) и заменим в нём знак «плюс» в знаменателях и числителях дробей на знак «минус».

Получим равенство:

$$\frac{3^{\cancel{3}} - 1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}} - 2^{\cancel{3}}} = \frac{3-1}{3-2}, \qquad (19),$$

которое не является верным.

Для того чтобы изменённое равенство оставалось верным, попытаемся варьировать числовые значения, например, как в предыдущем случае, двойку заменить другим подходящим числом.

***Задача* 26.** *Изменить значение вычитаемого в знаменателях обеих дробей* (19) *так, чтобы сокращение дробей «не по правилам» стало возможным.*

Запишем искомое равенство в виде:

$$\frac{3^3 - 1^3}{3^3 - x^3} = \frac{3-1}{3-x}. \qquad (20)$$

Будем исходить из того, что, если числитель левой дроби больше числителя правой дроби в 13 раз, то в таком же отношении будут находиться и знаменатели этих дробей.

Тогда:

$$3^3 - x^3 = 13(3 - x).$$

При положительных $x \neq 3$, получаем:

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Откуда:

$$x = 1.$$

Подставляя полученное значение x в (20), получим тривиальный пример сокращения «не по правилам»:

$$\frac{3^{\cancel{3}} - 1^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}} - 1^{\cancel{3}}} \neq \frac{3-1}{3-1}.$$

Может быть, попытаться изменить значение вычитаемого в числителях дробей?

***Задача* 27.** *Изменить значение вычитаемого в числителях обеих дробей* (19) *так, чтобы сокращение дробей «не по правилам» стало возможным.*

Запишем искомое равенство в виде:

$$\frac{3^3 - x^3}{3^3 - 2^3} = \frac{3-x}{3-2}. \qquad (21)$$

Будем исходить теперь из того, что числитель левой дроби должен быть больше числителя правой дроби в 19 раз.

Тогда:

$$3^3 - x^3 = 19(3 — x).$$

При положительных $x \neq 3$, получаем:

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Откуда:

$$x = 2.$$

Подставляя полученное значение x в (21), также получим тривиальный пример сокращения «не по правилам»:

$$\frac{3^{\cancel{3}}-2^{\cancel{3}}}{3^{\cancel{3}}-2^{\cancel{3}}} \neq \frac{3-2}{3-2}.$$

***Задача* 28.** *Изменить значение вычитаемого и в числителях, и в знаменателях обеих дробей* (19) *одновременно так, чтобы сокращение дробей «не по правилам» стало возможным.*

Запишем искомое равенство в виде:

$$\frac{3^3-x^3}{3^3-y^3} = \frac{3-x}{3-y}. \qquad (22)$$

При $x \neq 3$, $y \neq 3$ получаем:

$$9 + 3x + x^2 = 9 + 3y + y^2$$

или

$$(x - y)(x + y + 3) = 0.$$

При натуральных значениях x и y

$x + y + 3 \neq 0$,

значит:

$x - y = 0$ или $x = y$.

Подставляя y вместо x в (22) получим тривиальное равенство:

$$\frac{3^3-y^3}{3^3-y^3} = \frac{3-y}{3-y}.$$

Может быть, взять за исходный не (1), а какой-либо другой пример из (3)?

***Задача* 29.** *Проделать те же самые испытания с другими примерами равенств из* (3).

Снова получаем лишь тривиальные примеры сокращения «не по правилам».

Возникает предположение, что нетривиальных примеров такого сокращения «не по правилам» нет.

***Задача* 30.** *Доказать, что нетривиальных примеров сокращения «не по правилам» дробей, числители и знаменатели которых записаны в виде разности двух натуральных чисел, не существует.*

Можно рассуждать так.

Предположим, что имеет место

$$\frac{n^3-k^3}{n^3-m^3} = \frac{n-k}{n-m} \quad (m \neq n,\ k \neq n).$$

Тогда:

$$n^2 + nk + k^2 = n^2 + nm + m^2$$

или

$$m^2 + nm - (k^2 + nk) = 0.$$

Откуда

$$m_1 = k,\ m_2 = -n - k.$$

При $m = k$ получаем тривиальное равенство:

$$\frac{n^{\cancel{3}}-k^{\cancel{3}}}{n^{\cancel{3}}-k^{\cancel{3}}} = \frac{n-k}{n-k}.$$

Второе найденное значение $m = -n - k$ не подходит, поскольку не является натуральным числом.

Итак, представленную цепочку составляют 30 задач, объединённых в 3 цикла 1–14; 15–25 и 26–30. Их постановка и решение мотивируются предшествующей деятельностью, которая носит индуктивный характер и имеет продуктивную направленность. Особую ценность представляют результаты, отражённые в 4, 7, 9, 14, 16 и их обобщениях 10 и 17, а также утверждения, доказанные в задачах 14, 25 и 30. По сути, в процессе работы с цепочкой задач создана маленькая теория о необычном сокращении дробных выражений. ❑