

Моделирование в учебной математической деятельности

Сергей Рувимович Коголовский,

профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук

• моделирование • психологические механизмы • поисково-исследовательская деятельность • строгие математические понятия • механизмы понимания •

Моделирование — это способ замещения рассматриваемого объекта, направленного на его изучение. Предмет научного исследования — это модель его объекта. Добавим к этому, что мышление — это «процесс непрерывно совершающегося обратимого перевода информации с собственно психологического языка пространственно-предметных структур... то есть языка образов, на психолингвистический, символически-операторный язык»¹. Иначе говоря, мышление — это процесс совершенствующегося взаимного моделирования образа и символически-операторного, или рационального, образования. И потому утверждать о значимой роли моделирования в обучении математике — значит ещё ничего не сказать. Отсюда же следует, что утверждать о ведущей роли традиционно понимаемого наглядного моделирования в обучении математике, под каковым понимают моделирование, основанное на обращении к наглядно-образным средствам как к внешней опоре внутренних действий², тоже значит не сказать ничего.

Впрочем, расширенное понимание наглядного моделирования видят в том, что роль образа могут играть и рациональные образования (в том числе и сложные). Но такое понимание моделирования как наглядного и сохранение за ним прежнего названия со-

ла — это построение и освоение продуктивной модели этих представлений, модели, во многом не «адекватной» этим представлениям. Освоение такого понятия требует преодоления привязанности к исходным представлениям и связанным с ними наглядным образам и формирования ориентировки в представляемом им поле математической деятельности, сопровождаемого формированием новых наглядных представлений. К тому же в таком строгом понятии, как и в большинстве ведущих математических понятий, зримо проявляется его деятельностное существо: оно является моделью не столько самих исходных представлений, сколько «заклѳченных» в нём методов.

Моделированию, его формам, отношениям между исследуемыми объектами и их моделями в математической деятельности присущ особый, уникальный характер, рождаемый предметом математики, самой её природой (и именно эта уникальность делает обучение математике особенно значимым средством общего интеллектуального развития учащихся). В процессах создания работоспособных моделей исследуемых систем, в самом строительном материале, используемом в их построении, в характере функционирования моделей, во множестве играемых ими ролей (среди которых метакогнитивная, в частности метаориентировочная, роль является одной из ведущих), в характере взаимодействий моделей с их прообразами органично увязываются все ведущие направления и формы математической деятельности, все психологические механизмы, в ней участвующие.

вершено не оправданно. Например, восхождение от наивных представлений о предельном переходе к строгому понятию преде-

¹ Веккер Л.М. Психические процессы. Т. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. С. 134.

² Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: учебное пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.

В таких процессах зримо проявляется деятельностная природа, деятельностное существо математики.

В приведённой в начале текста цитате говорится о мышлении как о процессе взаимодействия двух языков. Однако при решении, например, такой задачи, как исследование поведения функции, нередко участвуют три языка, соответствующие трём наиболее распространённым способам описания функций, — аналитический, геометрический (графический) и табличный³. В таком процессе взаимодействуют три модели. И это обстоятельство также говорит о сложности психологических механизмов, участвующих в процессах математического моделирования, а значит, о необходимости широких психолого-педагогических исследований, посвящённых моделированию в математической деятельности.

Особого исследования заслуживают психологические механизмы, участвующие в «высоких» формах учебной деятельности, связанных с движениями «по вертикали» и многоуровневыми знаковыми опосредствованиями⁴. Такие восхождения представляют *многоуровневые* процессы моделирования. В этих процессах взаимодействия «лево»- и «правополушарных» механизмов, взаимодействия процессов анализа и синтеза имеют иной характер, чем в формах деятельности, связанных с движениями «по горизонтали». Формируются образования, выполняющие роли межуровневых «посредников», происходят преобразования системы значений и смыслов, рождаются «мета»-смыслы (приближающие к постижению «прото»-смыслов), и в этом не последняя роль принадлежит допонятийным формам мышления, несущим способность рождать высокие наивы⁵.

«Приручаемые», «обкарниваемые», формируемые многомерной математической деятельностью, направленной на развитие соответствующих теорий, последние превращаются в её орудия. И это также говорит о необходимости широких психолого-педагогических исследований, посвящённых моделированию в учебной математической деятельности не только как средству научения решать те или иные задачи, но и как средству, прямым образом работающему на развитие стратегий поисково-ис-

следовательской деятельности учащихся, а следовательно — на развитие у них творческого начала, на их общее интеллектуальное развитие, на приобщение их к методологии системных исследований.

Дух системы обучения математике, её направленность, степень её эффективности во многом определяются характером отношения к диаде *нестрогие понятия — строгие понятия*. Поскольку нестрогие и строгие понятия взаимодействуют опосредствованным образом, поскольку вторые во взаимодействиях с первыми выступают как их продуктивные модели, то более естественно рассматривать триаду *нестрогие понятия — моделирование — строгие понятия*. Проектирование полнокровной системы обучения математике невозможно без прояснения вопроса о том, каким должен быть характер функционирования этой триады.

При всём многообразии работ, посвящённых моделированию в учебной математической деятельности, весьма проблематично найти такие из них, которые содержат примеры использования моделирования как способа формирования строгого математического понятия. И это притом, что такие понятия являются (по своей природе) продуктивными *моделями* нестрогих понятий и освоение некоторых из них представляет трудную задачу не только для школьников, но и для студентов-математиков. Дело здесь отнюдь не в игнорировании исследователями такой постановки проблемы, или в её большей сложности, а в том, что её решение требует методов, сообразу-

³ Так что приведённая цитата характеризует достаточно простые формы мышления. Вообще говоря, в процессах мышления может взаимодействовать много «левополушарных» и много «правополушарных» языков, при этом некоторые из них, не обязательно «левополушарные», могут играть мета-роли. И эти роли могут переходить от одних языков к другим.

⁴ Многоуровневые знаковые опосредствования используются и на элементарных уровнях учебной деятельности. См., например, Коголовский С.Р., Шмелева Е.А., Герасимова О.В. Путь к понятию (от интуитивных представлений — к строгому понятию). Иваново: Ивановский областной институт повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, 1998. 206 с.

⁵ На известных стадиях процесса восхождения от освоенной понятийной системы к системе более высокого уровня освоенные понятия выступают в более или менее свёрнутой форме и потому функционируют подобно допонятийным представлениям. Свёрнутая форма благоприятствует работе механизмов абстрагирования и синтеза и тем самым способствует восхождению на новый понятийный уровень.

ющихся с идеей развития, которое сопровождается преобразованиями способов деятельности (то есть с природой строгих математических понятий, проявившейся в логике исторических процессов становления и отражающейся в психологических механизмах их освоения).

Важность разработки эффективных средств использования моделирования как способа формирования строгих математических понятий⁶ (и, прежде всего, ведущих строгих понятий) состоит и в том, что такой способ, долженствующий представлять модели исторических процессов становления этих понятий, позволял бы в полной мере раскрыть их деятельностное существо, их полифункциональный характер. А тем самым приводил бы учащихся к осознанию природосообразности деятельностного метода их освоения. В особой степени сказанное относится к понятиям предела функции, непрерывности и другим понятиям из начал анализа, к понятиям, подлежащим рассмотрению в рамках использования аксиоматического метода. Эти понятия, как и другие ведущие строгие математические понятия, являются не столько моделями «вещей», сколько моделями эффективных способов исследования «вещей», исследовательскими средствами.

При таком подходе перестаёт быть естественным типичное для традиционного подхода к обучению математике рассмотрение в качестве начала освоения понятия вопросов о его существенных и несущественных признаках. Да и естественно ли ставить вопрос о несущественных признаках ведущего строгого понятия как представляющего идеальную форму? И всегда ли естественно говорить о признаках понятий? Разве

⁶ Такое моделирование не может характеризоваться принадлежащей В.Г. Болтянскому формулой «изоморфизм плюс простота», даже понимаемой метафорически. А вместо формулы А.Н. Леонтьева «внешние опоры для внутренних действий обучаемых» здесь более уместна формула «формирование внутренней опоры для преобразования стратегии мыследеятельности».

⁷ Существенную роль в процессах формирования строгих общих математических понятий как моделей нестрогих понятий играет феноменологическая редукция в смысле, близком гуссерлевскому (Гуссерль Э. Логические исследования. Исследования по феноменологии и теории познания. М.: Дом Интеллектуальной Книги, 2001. 500 с.). И не в последнюю очередь эта её роль рождает уникальный характер математического моделирования, проистекающий из самой природы математических понятий как моделей способов мыследеятельности.

понятия предела и непрерывности не представляют сложные целостности, не сводимые к более простым их компонентам? Естественно ли говорить о каких-либо признаках таких понятий?

Задача разработки эффективных средств использования моделирования как метода формирования строгих общих математических понятий — это задача восхождения от использования моделирования как метода решения задач в рамках наличествующих форм мыследеятельности к моделированию как средству преобразования самих этих форм⁷.

Процессы моделирования обычно состоят из поисково-исследовательской деятельности, направленной на формирование работоспособных моделей рассматриваемых систем (способов действий), из исследования построенных моделей «самих по себе», как структур, являющихся предметами изучения, и применения результатов этих исследований к рассматриваемым системам. Традиционное обучение математике сосредоточивается на втором из этих планов. Оно использует, как правило, *заданные* модели и *заданные* способы использования их как моделей. При этом их роль как моделей остаётся скрытой. Тем самым замещение превращается в подмену. Вследствие этого обучение математике утрачивает развивающий, а с ним и гуманитарный характер.

Пронизывание учебной деятельности процессами моделирования, осознаваемыми как таковые и поднимающими обучение математике над процессами усвоения тех или иных ЗУНов, включение в математическую деятельность процессов формирования ведущих строгих математических понятий как продуктивных моделей нестрогих понятий и постижение логики таких процессов приобщает учащихся к МАТЕМАТИКЕ, к её сокровенному существу. Всё это делает обучение математике полноценно развивающим, открывает возможность органичного, природосообразного построения процесса обучения в старшей школе, позволяет учащимся осознать истинное место и роль формально-логических средств в математической деятельности. А также помогает понять, что эти средства являются не только средствами проверки истинности тех или иных гипотез и продуктивной

организации математических знаний, но и носителями креативного начала, способами осуществления прорывов на новые уровни математической деятельности, в новые её пространства, характеризующиеся новыми предметами исследования, новыми процедурами, значениями и смыслами, новыми ценностями⁸.

Пронизывание учебной деятельности процессами моделирования — это эффективный и природосообразный способ активизации и развития механизмов синтеза, а посредством этого и механизмов понимания.

Рассматриваемые в единстве *цель, условия и предполагаемые способы её достижения* как составляющие учебной деятельности образуют ядро второго компонента триады *нестрогие понятия — моделирование — строгие понятия* и представляют собою *учебную задачу*. Таким образом, учебная задача призвана играть роль посредствующего звена как во взаимодействии компонентов диады *метод — поиск*, так и во взаимодействии компонентов диады *объект — модель*. Вот почему процесс моделирования в учебной математической деятельности, осуществляемый во всей своей целостности (то есть процесс функционирования триады *объект — моделирование — модель*) не может не сопрягаться с процессом функционирования триады *метод — учебная задача — поиск*, а процесс функционирования триады *метод — учебная задача — поиск* — с процессом функционирования триады *объект — моделирование — модель*. Учебная задача — это центральное звено учебной деятельности.

Поисково-исследовательская деятельность не может не сопровождаться поиском и построением работоспособной модели исследуемого объекта, или, что то же самое, работоспособной модели самой этой деятельности (то есть модели, представляющей метод исследования этого объекта). Таким образом, работа триады *объект — моделирование — модель* выступает как средство работы триады *метод — учебная задача — поиск*, а работа триады *метод — учебная задача — поиск* — как средство работы триады *объект — моделирование — модель*. Превращение метода исследования в его предмет, а предмета исследования в его метод — это типичная форма прояв-

ления *принципа амбивалентности*, присущего математической деятельности.

Система развивающего обучения математике, основанная на понимании развития как приводящего к коренным преобразованиям, к преобразованиям, не может не быть системой развивающейся учебной деятельности, системой, характеризующейся нарастанием многомерности и многоуровневости. И помочь будущему учителю её осваивать и органично воплощать может выделение таких способов обучения, которые имели бы системообразующий, системообразующий характер, таких, что их воплощение с необходимостью порождало бы органичное развёртывание и взаимодействие всего арсенала методов, закладываемых в систему обучения математике. Таким системообразующим способом является пронизывание учебной деятельности процессами моделирования, обращение к процессам исследования учебных задач, осуществляемым в контексте задач моделирования, а прежде всего — осуществление процессов формирования, освоения и развития строгих ведущих понятий, несущих прорывы к новым формам и уровням мыслительной деятельности.

Процессы моделирования в учебной математической деятельности, осуществляемые во всей своей целостности, активизируют работу психологических механизмов, участвующих в этой деятельности, рождают их координацию, их системное взаимодействие и стимулируют его развитие. Тем самым *процессы моделирования способствуют развитию не отдельных качеств мышления в их изолированности, а органичному математическому и общему интеллектуальному развитию учащихся*.

Гипертрофия места формальной логики и атрофия её креативной роли в обучении математике, настойчивые попытки «очище-

⁸ **Коголовский С.Р.** О развивающем обучении математике // Приложение к книге «Путь к понятию: от интуитивных представлений — к строгому понятию» / Иван. обл. ин-т повышения квалификации и переподготовки пед. Кадров. Иваново, 1998. С. 192–205; **Коголовский С.Р.** Развивающее обучение математике как преобразующее обучение. Иваново, Изд-во Иваново, 2010. 208 с.; **Коголовский С.Р.** К методологии преобразующего обучения (Обучение школьников математике). — LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011. 425 с.; **Коголовский С.Р., Шмелева Е.А., Герасимова О.В.** Путь к понятию (от интуитивных представлений — к строгому понятию). Иваново.: Ивановский областной институт повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров, 1998. 206 с.

ния» обучения математике от использования непонятных форм мышления — всё это порождается метаустановкой традиционной педагогики математики, состоящей в том, что в качестве *объекта* изучения математики как учебной дисциплины рассматриваются идеальные математические объекты и формально-логические средства их исследования. Она порождает превращение того, что должно быть *предметом* обучения математике, в её *объект*. Отсюда монологизм в стратегии обучения и догматизм, особенно остро проявляющийся в преподавании геометрии. Формы мышления, способы действий, рождаемые самой природой математической деятельности, самим её существованием, в результате такого превращения становятся для учащихся невызываемыми правилами игры.

Осознанию учащимися необходимости доказательств и формированию способности к их поиску в существенно большей степени способствует такая стратегия обучения математике, при следовании которой идеальные объекты не преподносятся учащимся как *предсуществующие*, а *формируются* ими или вместе с ними как продуктивные модели обыденных представлений. И посредством этого глубже осознаются адекватные средства их исследования. Такая стратегия соответствует *онтогенетическому* подходу к обучению математике, при котором сама развивающаяся и преобразующаяся учебная математическая деятельность становится объектом математики как учебной дисциплины в старшей школе, а её предметом становятся строгие математические понятия как её идеальные орудия, как продукты и как носители её преобразований.

Если для традиционного подхода к обучению математике характерно преимущественное движение от предмета к объекту (или, говоря словами Л.С. Выготского, сверху вниз — от научных понятий к житейским), то для реализации подхода, следующего принципу *от неразвитого целого — к развиваемому и преобразуемому целому*, необходимы движение от объекта к пред-

мету и от предмета к объекту. То есть движение от развиваемого объекта к предмету как продукту развития объ-

екта и «погружение» предмета в объект, ведущее к преобразению как объекта, так и предмета. При таком подходе развитие системы знаний учащихся осуществляется посредством взаимного стимулирования развития высших и нижележащих уровней.

И при «погружении» в объект предмет сохраняет за собой роль системы идеальных орудий объекта, и это рождает их активный «диалог», который развивается в «полилог» различных представлений, аспектов, позиций, ведущий к рождению и развитию многоуровневой рефлексивной деятельности, к рождению и активному функционированию *диады внутренняя форма — внешняя форма*, к развитию её функционирования. Всё это открывает возможность полноценной реализации в обучении и превращения в *математическое*⁹ достояние учащихся *принципа дополненности*, состоящего в том, что мыследеятельность, как и всякая сложная форма деятельности, — это процесс взаимодействий взаимно дополнительных механизмов и что такие взаимодействия приводят к рождению новообразований-посредников, преобразующих её характер.

В процессах движения от обыденных представлений к идеальным объектам, сопровождающихся многократными превращениями внутренних форм, раскрывается Большая Логика процесса развития форм и способов мышления. Она настраивает на восхождение к теоретическому уровню мышления, к той высокой рациональности, которую называют открытой рациональностью.

Знаковое моделирование является существенным компонентом математической деятельности на всех её уровнях. Едва ли возможно более выразительно представить роль знаковых средств, знакового моделирования в математической деятельности, открываемые им возможности, чем словами Гуссерля: «Если сообразить, как ограничены интеллектуальные силы человека, и... как узка та сфера, внутри которой находятся ещё вполне доступные пониманию усложнения абстрактных понятий, и как трудно даже одно только понимание таких своеобразно сочетающихся усложнений, если рассудить, как мы... ограничены в самом уразумении смысла умеренно сложных связей между положениями и ещё более — в действительном и самоочевидном осуществлении даже

⁹ От слова «математика», принадлежащего С. Пейперту и означающего науку об умении учиться (Пейперт С. Переворот в сознании (дети — компьютеры и продуктивные идеи). М.: Педагогика, 1989).

умеренно сложных дедукций, наконец, если принять во внимание, как ничтожна а fortiori сфера, в которой может первоначально вращаться активное, вполне ясное, повсюду борющееся с самой мыслью исследование... то надо изумляться, как вообще могли создаться более обширные рациональные теории и науки.... Проблема состоит в том, как возможны математические дисциплины, в которых с величайшей свободой движутся не относительно простые мысли, а целые груды мыслей и тысячекратно переплетённые друг с другом связи мыслей, и где исследование создаёт всё усложняющиеся их сочетания. Это делают искусство и метод. Они преодолевают несовершенство нашей духовной организации и позволяют... посредством символических процессов при отсутствии наглядности, прямого уразумения и очевидности выводить результаты, которые вполне верны, ибо... гарантированы общим обоснованием правильности метода.... Это широкое сведение самоочевидных процессов мышления на механические... покоится на психологической природе знаково-символического мышления»¹⁰.

Высшие психические функции внутренне связаны с развитием знаково-символической деятельности. Они «включают в свою структуру как центральную и основную часть всего процесса в целом употребление знака»¹¹. Благодаря использованию знаков натуральные процессы перестраиваются, превращаясь в опосредствованные. Знаковые операции превращаются во внутренние психологические системы. При вращивании возникают новые психологические функциональные системы. Выготским раскрыты психологические механизмы формирования культурного развития ребёнка посредством развития его знаково-символической деятельности.

Далеко не последней причиной трудностей, испытываемых школьниками при обучении математике, является недостаточная разработанность методов их приобщения к знаково-символическим механизмам. Она, в свою очередь, проистекает из недостаточной прояснённости механизмов их освоения и развития, особой роли и глубокой специфики таких механизмов, участвующих в математической деятельности, из их высокой сложности. Уже начальный уровень овладения ребёнком языком арифметики требует тако-

го способа, «когда одни и те же объекты выступают как объекты трёх разных систем: отношения равенства, отношения «целое — части» и счёта (при этом отношение равенства и счёт включались в способ как действия, а отношение «целое — части» — как совокупность операций).

Это требует такой учебной задачи, которая обеспечивает введение трёх типов моделей и операций с ними (модели «целое — части», модели отношения равенства, модели объекта пересчёта — «линеечка») и построение такого особого действия, включающего эти три типа объектов и операций, причём таким образом, чтобы одни и те же объекты использовались во всех этих трёх значениях, так как «арифметическая формула является примером специфического знакового замещения, которое в отличие от других типов заместителей (предметных, символических и т.п.), всегда фиксирует синтез разного типа содержаний»¹². А из этого следует, что «учебная задача, соответствующая усвоению такого содержания, является искусственной: в том смысле, что она не существовала вне обучения как определённая сложившаяся конкретная деятельность с определёнными конкретными предметами, а конструируется специально в целях обучения»¹³.

Говоря более широко, освоение учащимися новых для них способов и уровней мышления и овладение необходимыми для этого формами знакового моделирования требует использования *искусственных задач*, то есть задач, конструируемых специально в целях обучения. Очевидно, к чему могут привести «модернизаторские» призывы «очистить» школьный курс математики от *всех* «безыдейных» задач, то есть задач, не соответствующих лобовым образом целям обучения (а тем самым «очистить» этот курс и от эффективных методов его освоения). Отсюда же следует, что решение учебной задачи

¹⁰ Гуссерль Э. Логические исследования. Картезианские размышления. Минск: Харвест, М.: Аст, 2000. 452 с.

¹¹ Выготский Л.С. Мышление и речь // Выготский Л.С. Собрание сочинений. Т. 2. М.: 1982. С. 126.

¹² Непомнящая Н.И. Педагогический анализ и конструирование способов решения учебных задач // Георгий Щедровицкий, Вадим Розин, Никита Алексеев, Нелли Непомнящая. Педагогика и логика. М.: Касталь, 1993.

¹³ Там же.

в смысле В.В. Давыдова, направленной на усвоение школьниками обобщённых способов предметных действий, далеко не всегда сводимо к тому, чтобы «ученики, столкнувшись лишь с одной конкретной частной задачей, стремились, прежде всего, подвергнуть её... анализу, чтобы выделить внутреннюю связь её условий, отвлекаясь при этом от частных их особенностей»; к тому, чтобы «решая <одну> конкретную задачу данного типа, они, если можно так выразиться, решали все задачи данного типа»¹⁴.

Открыть общий метод — не значит освоить его. Освоение общего метода — это процесс накопления опыта его использования в разнообразных ситуациях. Это процесс, вбирающий в себя всё более широкий круг особенных и единичных ситуаций и направленный на поиск их преобразований в такие формы, которые делали бы возможным применение к ним этого метода. А значит, это и процесс развития поисково-исследовательской деятельности, процедур использования этого метода.

Процесс овладения методом — это процесс вращения новой формы деятельности, связанный с глубокими изменениями в деятельности высших психических функций, с коренной перестройкой психической деятельности на основе знаковых операций. Это процесс, сопровождающийся в известной степени вращиванием самих знаковых операций. Он невозможен без рутинной работы, направленной на овладение новыми знаковыми операциями, новой формой знаковой деятельности, на развитие координации действий и приводящей к кристаллизации «стандартных блоков» операций и действий и их свёртыванию, к превращению этих блоков в элементарные действия, что приводит к развитию «дальновидения» и «дальнодействия» мышления и способствует овладению более сложными и более масштабными формами поисково-исследовательской деятельности.

Обучение математике невозможно без развития способности учащихся к знаковому моделированию. Эффективным способом развития такой способности является развитие способности учащихся к совершенствованию

предлагаемых им или ими же построенных знаковых мо-

делей тех или иных объектов. Этот способ не может не предполагаться подходом к обучению математике, основывающимся на принципе *от неразвитого целого — к развиваемому и преобразуемому целому*.

Знаковая система, осваиваемая при восхождении от школьной арифметики к школьной алгебре является способом не только свёрнутых описаний арифметических выражений, но и свёрнутого осуществления их преобразований, способом знакового моделирования. Она открывает возможность работы с такими понятиями, как «целостность» и тем самым несёт возможность далеко идущего развития постановок задач и методов их решения.

Знаковая система школьной алгебры используется и как средство выражения и фиксации тактики внимания, и как средство удержания в сознании целостности предмета рассмотрения, и как средство усмотрения, выражения и обыгрывания его структуры, и как средство выражения программы действий, и как средство восхождений к метауровневым рассмотрениям, и, в конечном счёте, как средство возрастания дальновидения и дальнодействия мышления. Тем самым в возможностях этой знаковой системы заложено движение к преобразованиям форм и уровней учебной деятельности. Но в какой степени традиционное обучение алгебре использует эти возможности? Насколько широко в обучении алгебре используется разнообразие «семантических» ситуаций для овладения широкими возможностями её «синтаксических» средств?

Обращение к задачам на вычисление сложных арифметических выражений открывает несомые языком алгебры широкие возможности формирования привычки настраивать внимание на восприятие исследуемой ситуации в целом и способности к такому восприятию, способности схватывать, выражать, совершенствовать и обыгрывать структуру целого, способности, являющейся важным компонентом математической и общей интеллектуальной культуры. Такие возможности реализуемы уже при первичном овладении учащимися алгебраической знаковой системой как языком, дающим возможность выражать общие формы арифметических задач и общие формы их решения. И тогда обращение к задачам на вычисление сложных

¹⁴ Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. М.: Интор, 1997. С. 159.

арифметических выражений способствует дальнейшему развитию владения языком алгебры, при котором его знаки, вводимые как конвенциональные, превращаются для учащихся в знаки иконические.

Только такой уровень овладения языком алгебры несёт возрастание дальновидения и дальнодействия мышления. Он рождается как новообразование, формируемое «критической массой» количества и разнообразия упражнений. Трудности в освоении школьного курса алгебры, как правило, имеют своим истоком недоведённость до «критической массы» количества, разнообразия и уровня сложности упражнений, направленных на овладение языком алгебры.

Освоение языка алгебры становится возможным только по достижении известного уровня овладения языком арифметики, которое также является новообразованием, «творческим продуктом», подготавливаемым «критической массой» количества, разнообразия и уровня сложности задач и упражнений¹⁵.

Овладение системой знаков, обслуживающих то или иное поле математической деятельности, как носителем возможности эффективного знакового моделирования и вводимых (и первоначально воспринимаемых) как знаки условные, то есть как символы в смысле Пирса, приводит к превращению образуемых из них знаковых форм в знаки «иконические». При этом рождается новообразование, представляющее новую систему образов, вырастающую «над» знаковой системой и преобразующую ориентировочную деятельность. Освоенность поля математической деятельности состоит в появлении такого новообразования. Осознание этого проясняет пути поиска более продуктивных способов обучения математике и способов определения уровня освоенности материала.

Строгое математическое понятие — это, прежде всего, модель представлений о способе мыследействий, являющихся его истоком, его прототипом. Так как модель не «адекватна» своему прототипу, необходим процесс «вживания» в неё, организуемый так, чтобы представления, прото-понятия, послужившие её прототипом, не подавлялись, а развивались, утончались посредством их взаимодействия с созданной моделью. Таким образом, это понятие с са-

мого начала играет далеко не просто роль модели. Более того, процесс «вживания» в него, овладения им ведёт к обретению этим понятием «онтологического» статуса, к тому, что модель и её прототип меняются ролями, к тому, что модель обретает смыслопорождающий характер.

С моделирования начинается восхождение на понятийный уровень мышления. Моделирование пронизывает математическую деятельность, начиная с самого элементарного её уровня. Особо значимым способом обучения, ведущим учащихся к осознанию места и роли моделирования в математической деятельности, особо значимым способом обогащения их метакогнитивного опыта, отвечающим самой природе математической деятельности, является осуществление процессов восхождения от интуитивных представлений, от прото-понятий к строгим математическим понятиям, процессов их формирования, восхождения к аксиоматическим системам. Этот способ направляется на освоение не только продуктов учебной деятельности, но и логики процессов её развёртывания. Математическая деятельность изначально «беременна» понятийным уровнем мышления. История становления математики как науки — это и история становления понятийного уровня мышления. Ведущие математические понятия являются моделями общих форм и способов эффективных мыследействий.

Только пронизывание учебной деятельности процессами моделирования (осознаваемыми как таковые) позволяет учащимся осознать, что фундаментальные математические концепции являются «отражениями», моделями не самого «внешнего мира», а способов его «отражения», и что в этом — объяснение их универсальной приложимости. Тем самым оно помогает осознать и то, что обращение к собственно математическим задачам может служить эффективным способом обучения математическому моделированию и как способу решения прикладных задач. □

¹⁵ В связи со сказанным нельзя не отметить, что нередко формы проверки уровня усвоения школьниками того или иного материала фактически направлены на проверку степени усвоения способов подготовки к рождению освоенности этого материала как новообразования. Поскольку такие формы проверки используются и как способы оценивания уровня усвоения материала, они навязывают учащимся как требуемую норму то, что служит лишь подготовке к усвоению. Тем самым они превращаются в препятствия внутренним процессам, ведущим к его усвоению.