О приобщении школьников к аксиоматическому методу

Сергей Рувимович Когаловский,
профессор кафедры математики, информатики и физики Шуйского педагогического университета, кандидат физико-математических наук

• аксиоматический метод • математическое моделирование • релятивизм • интеллектуальная деятельность •

Давно осознана важность задачи обучения школьников геометрии на аксиоматической основе как эффективного средства развития их логической и собственно математической культуры. Не одно десятилетие предпринимаются попытки преодоления трудности её реализации. Но при всей ценности достижений на этом пути разброс в понимании истоков этой трудности и в предлагаемых средствах её преодоления говорит о том, что пока не выявлены истинные её истоки. В связи с этим естественен вопрос: существуют ли *методические* средства её преодоления, вписывающиеся в рамки какой-либо из бытующих систем обучения, или для преодоления этой трудности необходимы иные *методологические* средства?

«Математика — это прежде всего логика». Этой установке следуют и сегодня многие учителя математики. Но как это ни парадоксально звучит, это не только не способствует логическому развитию школьников, напротив — препятствует ему[1]. Говоря о логике, чаще всего имеют в виду единственно классическую формальную логику и при этом полагают, что её освоение обеспечивает возможность математического, а с ним и общего интеллектуального развития. Тем самым игнорируется то, что в математической деятельности даже достаточно элементарного уровня участвуют разные логики[2], разные формы (и уровни) мышления. Представления о необозримо сложных механизмах мышления, о работе механизмов понимания низводят до представлений о работе безмозглого компьютера.

Не столь уж редким является понимание важности изучения школьниками (евклидовой) геометрии на аксиоматической основе как несущего достижение более высокого уровня освоения ими формальной логики. Такое понимание предполагает более или менее *лобовое* воплощение следующей программы: в основу кладутся некоторые исходные положения — аксиомы, из которых все другие утверждения теории, или теоремы, выводятся посредством чисто логических доказательств; все понятия развёртываемой теории, кроме фиксируемых в качестве начальных понятий, вводятся посредством определений, выражающих их через начальные понятия.

Однако такое понимание выражает форму воплощения *продукта использования аксиоматического метода, но не его существо* как осуществление деятельности, направленной *на формирование* оснований знаний, относящихся к рассматриваемой области поисково-исследовательской деятельности, *и на перестройку* этой области на таких основаниях.

Если учебная деятельность в рамках *заданной* аксиоматической геометрии предполагает логическое развитие разве что в рамках развития способности к использованию классической формальной логики, то участие в процессе *формирования* аксиоматической геометрии рассматривает логическое развитие в широком понимании — как

[1] **Когаловский С.Р.** К методологии преображающего обучения (обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011.

[2] Так, в поиске доказательства теоремы, например, относящейся к началам анализа, в самом её доказательстве и в проверке доказательства участвуют разные логики.

развитие многоплановой, многомерной логики математической деятельности, а посредством этого и развитие способности к использованию классической формальной логики.

Особая роль школьного курса геометрии как эффективного средства развития математических, а с ними и общих умственных способностей учащихся, состоит в том, что в обучении геометрии особенно зримо и активно взаимодействуют интуиция и логика, наглядно-образный и метапредметный уровни мышления, «низшие» и «высшие» его формы, прикладной и теоретический планы. Развитие пространственных представлений человека — это развитие его первоориентиров в физическом мире, его мировоззрения. И потому приобщение к аксиоматическому методу естественно и продуктивно осуществлять посредством обучения геометрии.

Не случайно математика как наука возникла именно в геометрической форме. И именно геометрическая форма способствовала уже достаточно ранней её направленности на обретение аксиоматической формы. Сама идея «умозрительного» доказательства, то есть доказательства чисто логическими средствами, требует выделения «первоистин», а с ними и первопонятий.

Трудно найти другую такую задачу методики обучения математике, которая столь тесно была бы связана с целями и задачами обучения математике в старшей школе, со всеми целями и средствами, предполагаемыми стандартами нового поколения, как задача отыскания эффективных средств приобщения школьников к геометрии, строящейся на аксиоматической основе. В конечном счёте, это задача формирования способности к построению и использованию продуктивных моделей сложных систем, несущих эффективные методы их исследования, задача, направленная на формирование способности к восхождению от уровня обыденных представлений на теоретический уровень. Такое восхождение предполагает не только исследование предметного плана, но и анализ самих познавательных средств. Освоение аксиоматического метода требует прямого участия в таких восхождениях.

Аксиоматический метод в роли предмета изучения в курсе математики общеобразовательной школы не обижен не только множеством приверженцев (что совершенно естественно), но и радикально настроенными противниками (что настолько же естественно). При всей кажущейся убедительности аргументов противников их анализ показывает, что эти аргументы относятся, по сути, не к самому аксиоматическому методу, не к его существу и не к вопросам о степени его значимости в самой математике и в её обучении, а к традиционному способу приобщения к нему школьников, следующему как образцу «Началам» Евклида.

Такой способ основывается на подмене логики поисково-исследовательской деятельности, логики овладения её стратегиями и их использования логикой усвоения систематизированного *итога* этой деятельности. Для такого способа характерна гипертрофия формально-логического плана. А это не способствует постижению существа аксиоматического метода и несомых им возможностей. Это не способствует и логическому развитию учащихся, такому, которое несло бы их математическое и общее интеллектуальное развитие.

Как уже говорилось, формальная (классическая) логика является весьма важным, но лишь одним из многих компонентов математической деятельности и лишь одной из множества логик, осознанно или неосознанно участвующих в ней и активно взаимодействующих. И потому логическое развитие учащегося, отвечающее задаче его математического развития, осуществимо через взаимодействия этого компонента со многими другими компонентами математической деятельности, через соотнесённость его с этой *деятельностью*[3] как части с целым.

Выразим сказанное почти дословным повторением слов Выготского[4]: компоненты деятельности участвуют в ней не столько как самостоятельно развивающиеся сообразно логике собственных закономернос-

[3] Слово «деятельность» выделено здесь с целью подчеркнуть, что формирование и развитие умственных действий, осуществляемое не автономно, а в контекстах задач формирования различных форм многоаспектной, многоуровневой математической деятельности, несёт математическое, а с ним общее логическое развитие учащихся.

[4] **Выготский Л.С.** Мышление и речь // Выготский Л.С. Собр. соч. Т. 2. М.: 1982. С. 132.

тей, сколько опосредованно, как направленные на решение определённой задачи и приведённые в такое сочетание, такой синтез, внутри которого каждый из них обретает своё истинное функциональное значение[5].

Приобщение школьников к какому-либо *заданному,* а не строящемуся при их активном участии варианту системы аксиом геометрии и обучение их такой деятельности в рамках этой системы, в которой довлеет логический план, воспринимается ими как навязываемый мёртвый ритуал. Ведь прямое обучение понятиям всегда оказывается фактически невозможным и педагогически бесплодным. Аксиоматическая теория осваивается только при прямом участии в процессе её формирования как продукт такого процесса, ведущего к смысловому скачку и превращению внутренней формы учебной деятельности. В отходе от этого заключается главная причина трудностей освоения аксиоматического метода. Личность развивается в той мере, в какой она схватывает принцип построения и преобразования форм организации мыследеятельности[6].

Процесс аксиоматизации теории, построенной на полуинтуитивной основе, — это процесс созидания её продуктивной абстрактной модели, становящейся тем самым и моделью других теорий, как наличествующих, так и возможных. Он осуществляется посредством деконструкции теории, посредством выявления значимых свойств её ведущих понятий и значимых отношений между ведущими понятиями и «отделения» этих свойств и отношений от их носителей, посредством «опредмечивания» этих свойств. Такой процесс предполагает восхождение на метапредметный уровень и является эффективным средством собственно математического (а с ним логического) и посредством этого общего интеллектуального развития учащихся.

Аксиоматизация теории — это подготовка и осуществление прорыва на новый уровень её развития, приводящего к новым процедурам, новым значениям и смыслам, новым ценностям, к новому уровню ориентировки, к новым направлениям развития теории. Аксиоматическая теория осваивается только при погружении в процесс формирования её как продукта такого процесса, приводящего к преображению исходной теории. То, насколько радикальное преображение мыследеятельности несёт переход от теории, строящейся на полуинтуитивной основе, к формируемой на её базе аксиоматической теории, показывает, что аксиоматическая теория становится нечленимым целым (что является зримым проявлением системного подхода), что ведущие понятия исходной теории при таком переходе превращаются в такие элементы аксиоматической теории, что отдельное их рассмотрение, вне рамок целого, становится невозможным.

Аксиоматизация геометрии осуществима как путь, ведущий к развитию представлений о привычном нам пространственном мире как целом и их преображению. Эффективное исследование этого мира осуществляется через его сопоставление с другими, возможными мирами или (что то же самое) через сопоставление привычного способа «видения» этого мира с другими способами его «видения»[7].

Обучение геометрии в школе строится так, чтобы аксиомы евклидовой геометрии воспринимались учащимися как аксиомы в обыденном смысле. То есть не как *полагаемые* условия, в рамках которых развёртывается рассмотрение, и в этом смысле не требующие доказательств, а как самоочевидные истины и потому не нуждающиеся в доказательствах. В этом качестве они закрепляются в сознании школьников и используются в учебной деятельности как основа решения частных и общих задач. Тем самым геометрия осваивается школьниками как теория, зиждущаяся на эмпирической основе. Формирование на её базе аксиоматической теории, способствующее постижению школьниками существа аксиоматического метода, начинается с превращения выделенной основы теории в предмет изучения, в частности, с исследования логических отношений

[5] Использованием слов «не столько как» вместо категорично звучащих «не как» (у Выготского) мы выражаем тот факт, что компоненты обладают и относительной самостоятельностью.

[6] **Громыко Ю.В.** Проектирование и программирование развития образования. М.: Моск. акад. образования. 1996. С. 110.

[7] Используя логическую терминологию, это можно выразить как построение разных «семантик» для традиционного «синтаксиса» школьной геометрии и их сопоставление.

между аксиомами, образующими её, и вопроса о том, действительно ли она является основой теории (то есть, действительно ли теоремы теории выводимы из этих аксиом без (осознанного или неосознанного) использования настолько же очевидных других фактов, а если нет, то каковы логические отношения между такими фактами и аксиомами).

Человеческое мышление склонно к неосознаваемой идеализации (чему способствуют и ограниченные возможности рецепторов). Это зримо проявляется в той лёгкости, с какой формируются у детей представления о прямой, плоскости, точке, и в той готовности, с какой они воспринимают аксиомы евклидовой геометрии, рассматриваемые в школьных учебниках, как самоочевидные истины. Такая склонность обыгрывается авторами учебников, методистами и учителями как дающая возможность школьникам осуществлять быстрый и успешный старт при изучении геометрии. Но это порождает уход учащихся от освоения доказательств теорем, которые при таком вхождении в начала геометрии предстают как очевидные. При таком вхождении в геометрию учащиеся не приводятся к осознанию существенно иной, не «обыденной» природы идеальных геометрических объектов, к осознанию необходимости существенно иной методологии связанных с ними исследований.

Но это оправданно: такой подход и не должен создавать усложнений для сохранения той здоровой, той несущей деятельностную энергию наивности учащихся, которая помогает им обрести знания, входящие в необходимый общеобразовательный багаж и способные служить стартовой содержательной базой для их приобщения к аксиоматическому методу. Они уводятся от несвоевременного осознания не «обыденной» природы идеальных геометрических объектов, и тем самым сохраняется возможность приведения их к более далеко идущему осознанию этого.

Первичное осознание того, что приносит радикальное преображение привычных представлений, обычно приходит не «через ворота научных понятий», а через пересмотр первопредставлений и прото-идей[8], чему способствуют столкновения с пограничными ситуациями, постановки вопросов пограничного характера[9]. Природосообразным средством, побуждающим учащихся к восхождению на теоретический уровень и открывающим возможность осознания ими существа аксиоматического метода, является столкновение их с ситуациями, ведущими к размыванию первопонятий геометрии и посредством этого ко всё большему удалению от очевидности аксиом евклидовой геометрии.

При этом достаточно (и естественно) ограничиться геометрией на плоскости. Начальный шаг в осуществлении такого средства естественно осуществлять как обращение к вопросам о том, что представляет собой или может представлять плоскость, тот «мир» (геометрии на плоскости), которому принадлежат рассматриваемые геометрические образы, к вопросам о том, единственно ли возможно, единственно ли разумно, единственно ли продуктивно то привычное представление о нём, которое лежало в основе изучения геометрии. Впрочем, само это привычное представление о «мире» (как и привычные представления о прямой и точке) сформировано обучением геометрии, теми схемами, теми видами рисунков, теми тактиками внимания, которые оно использует. Но разве менее привычны представления о плоскости как о подобии обозреваемой с высокой точки части земной поверхности, простирающейся до горизонта, то есть как о внутренности огромного круга?

Представим себе «мир», являющийся внутренностью (огромного) круга. Точками в нём являются точки этой внутренности, а прямыми — хорды (модель Клейна). Представим, что мы находимся в нём и что рассмотрения ведутся нами не во всём этом «необъятном» «мире», а в рамках нашей обозреваемости, в достаточной близости

[8] Ср. «Понимание на высших своих уровнях — это деятельность теоретическая, деятельность связывания идей, установления отношений между ними, приведения их к целостному, системному виду…. Такое понимание не может возникнуть просто из накопления фактов… Теоретический уровень… не единственный, на котором происходит построение систем и целостностей… На уровне более фундаментальных и менее развитых форм осуществляется накопление возможностей… «скачка» теоретического познания» (Автономова Н.С. Метафорика и понимание // Загадка человеческого понимания. М.: Политиздат, 1991. С. 95–112.).

[9] **Когаловский С.Р.** К методологии преображающего обучения (обучение школьников математике). LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011.

от его центра. Представления о точках и прямых в таком «мире» близки привычным. В нём выполняются все обычно рассматриваемые в школьных учебниках аксиомы евклидовой геометрии на плоскости, кроме аксиомы параллельности.

Таким образом, мы имеем две разные геометрии, основывающиеся на разных пониманиях плоского «мира» и порождаемых этим разных пониманиях прямой. Естественно обращение к вопросам о том, какая из этих геометрий более адекватно «описывает», выражает «реальный» плоский «мир», и так ли очевидна аксиома параллельности (пятый постулат Евклида).

Рассмотрим открытую полусферу огромного радиуса, то есть полусферу без её границы, в основании которой находится большой круг (без границы), представляющий описанного вида неевклидов «мир» ***A***, и «плоский» «мир» ***B*** на этой полусфере, такой, что его точки — это точки полусферы, а прямые — линии на полусфере, проекции которых на её основание являются его хордами, то есть прямыми в геометрическом мире ***A***. Визуально «миры» ***A*** и ***B*** существенно отличаются. Однако они удовлетворяют одним и тем же аксиомам, одним и тем же условиям, выразимым на языке геометрии на плоскости. Более того, эти «миры» могут рассматриваться как разные видения одного и того же мира: ***A*** — как видение «мира» ***B*** его обитателями, а ***B*** — как его же видение извне.

А теперь рассмотрим какую-нибудь всюду определённую непрерывную функцию $z=f(x,y)$, график которой представляет собой поверхность с большим числом оврагов, гор и ущелий, утёсов, изломов. «Мир» представляет собой эту поверхность. Точки в нём — это точки поверхности, а прямые — такие линии на поверхности, проекциями которых на плоскость $x0y$ являются прямые. *В* этом «мире», визуально очень не похожем на привычный евклидов «мир» на плоскости, естественным образом определимы все понятия евклидовой геометрии и выполняются все её аксиомы. Но так ли очевидны эти аксиомы для обитателей такого «мира»? Привычный евклидов «мир» на плоскости $x0y$ естественно рассматривать как идеальный образ этого «мира» и как продуктивную его модель.

Отталкиваясь от рассмотренных ситуаций, учащиеся сами смогут построить такой плоский «мир», в котором через некоторые две точки проходит более одной прямой, и такой, в котором не через всякие две точки проходит прямая.

Удовлетворяет ли «реальный» плоский геометрический мир аксиоме параллельности? Рассмотрения, подобные приведённым, помогают учащимся осознать, что подобные вопросы имеют смысл применительно к идеальным образованиям, к идеальным «мирам».

Евклидова или неевклидова геометрия на плоскости является описанием «реального» плоского геометрического мира? Рассмотрения, подобные приведённым, помогают осознать, что реальный мир может описываться разными аксиоматическими геометриями как его моделями, являющимися не просто средствами его описания, но и средствами его исследования, что выбор такого рода модели определяется не столько «адекватностью» реальному миру, сколько её продуктивностью как модели.

Рассмотрения, подобные приведённым, помогают понять и то, насколько кажущейся может быть очевидность тех или иных геометрических предложений, насколько непохожими могут быть «миры», удовлетворяющие одним и тем же аксиомам. Множественность возможных «миров» говорит и о том, что та наивная база, на которой строилась и развивалась геометрия, не исчерпывается продуктом этого развития. Она несёт больший орудийный потенциал, чем тот, который воплощён в этом продукте.

Эта множественность говорит и о принципиальной недостаточности только рациональных средств. Всё это подтверждает необходимость внепонятийного, наивного компонента учебной деятельности не только как «заводящего», «включающего» механизмы понимания, но и как носителя креативного начала, как источника и носителя далеко идущего развития мышления учащегося.

Дальнейшие шаги на базе обучения геометрии, направленные на приобщение школьников к аксиоматическому методу и несущие их математическое развитие, а с ним и мировоззренческое, должны быть направлены на выявление ими более глубоких слоёв своей субъективности, существенным образом влияющих на характер их мышления. Эти слои субъективности несут в себе всю полноту жизненного опыта учащегося. Они рождают первичную ориентировку в новых ситуациях, «заводят» механизмы понимания, способствуют проявлению креативности. Но и они же без соответствующего обучения учащегося становятся препятствием на пути его дальнейшего логического, а с ним и математического, и общего интеллектуального развития. Поэтому речь должна идти не о подавлении субъективности учащегося, а о таком его развитии, которое ведёт к преображению учащегося как субъекта учебной деятельности.

Эффективным средством такого развития является анализ доказательств теорем геометрии, приводящий к выявлению того, что в них имеется в виду, но явно не оговаривается и даже не осознаётся. Такой анализ приблизит учащихся к пониманию того, что такое аксиоматическая евклидова геометрия, какой она должна быть для обеспечения надёжного обоснования всего богатства теорем школьного курса геометрии. И подтолкнёт их к пониманию существа аксиоматического метода. Такой анализ будет нести их логическое развитие, направляемое осознанием того, что такое строгое доказательство и на чём оно основывается. Поясним сказанное примером в форме фрагмента сценария урока.

— Остаётся ли истинной теорема Пифагора в микромире? Остаётся ли она истинной применительно к таким треугольникам, длины сторон которых измеряются сотнями парсек? Остаются ли для таких треугольников истинными теоремы о равенстве треугольников?

— Конечно! Ведь это доказано для любых треугольников. Давайте рассмотрим доказательство какой-нибудь из этих теорем с тем, чтобы убедиться в том, что это так. Обратимся, например, к первой же теореме из учебника — к теореме, утверждающей первый признак равенства треугольников. И проверяя её доказательство, будем иметь в виду и микроскопические, и гигантские, космических размеров треугольники.

— Правильно ли я понимаю, что обсуждается вопрос о том, не используются ли в доказательстве какие-нибудь допущения, не выводимые из аксиом, например евклидовой геометрии, то есть имеющие место не во всяком «мире», удовлетворяющем аксиомам этой геометрии?

— Да, правильно. Если какой-нибудь «мир», пусть даже очень не похожий на привычный нам «мир», таков, что, например, евклидова геометрия является приемлемой его моделью, то решение вопроса о том, выполняется ли в нём (с удовлетворительной практической точностью) та или иная теорема, выводимая из аксиом евклидовой геометрии, не требует проверок, возможно, дорогостоящих и весьма затруднительных технически.

— Да и невозможна надёжная опытная проверка общего математического утверждения.

— Это так. Но многократно осуществимая опытная проверка может давать некоторое подтверждение, подобное опытному подтверждению физических гипотез. А для того, чтобы никакая теорема, например, евклидовой геометрии, не требовала таких подтверждений, то есть для того, чтобы она действительно была теоремой евклидовой геометрии, её доказательство должно использовать только аксиомы евклидовой геометрии. Для этого евклидова геометрия должна выстраиваться как аксиоматическая теория. Это значит, что в её основу должны быть положены некоторые исходные положения — аксиомы, из которых все другие утверждения теории, или теоремы, должны выводиться посредством чисто логических доказательств. Все понятия такой теории, кроме фиксируемых в качестве начальных понятий, первопонятий, должны вводиться посредством определений, выражающих их через начальные понятия. Вопрос о надёжности теорем такой теории сводится к вопросу о надёжности её аксиом.

— Теорема, надёжность доказательства которой мы решили проверить, формулируется так: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого

треугольника, то такие треугольники равны. Вот её доказательство[10]*:*

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы ***A*** *и* ***A_1*** (при вершинах *A и A_1) равны. Докажем, что эти треугольники равны.*

Так как углы ***A*** и **A_1** равны, то угол **A** можно наложить на угол **A_1** *так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB= A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1,* C и *C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, вершины треугольника ABC совместятся с вершинами треугольника $A_1B_1C_1$. Значит, эти треугольники равны*[11]*.*

— Кажется, всё в порядке. Это доказательство остаётся верным безотносительно к тому, гигантские или микроскопические треугольники имеются в виду.

— Но как ты понимаешь наложение одного гигантского, космических размеров треугольника на другой гигантский треугольник? Возможно ли такое наложение осуществить практически?

— Конечно! Это следует из определений равенства углов и равенства отрезков.

— Вы ведёте речь не о том. Объекты геометрии — это идеальные объекты. Поэтому проверять истинность относящихся к ним теорем невозможно иначе, чем сообразуясь с их идеальной природой, то есть используя единственно формальную логику и опираясь единственно на аксиомы геометрии и определения используемых понятий, выражающие их через первопонятия геометрии.

— Но входят ли понятия наложения угла на угол и отрезка на отрезок, используемые в доказательстве, в число первопонятий геометрии? Если нет, то где их определения? А если да, то где аксиомы, выражающие свойства этих первопонятий и их отношений с другими первопонятиями, то есть выражающие тот смысл, в котором используются термины «наложение отрезка на луч» и «наложение угла на угол»?

Так как смысл термина «наложение» не определён, этот термин может употребляться в каких угодно смыслах. А поскольку понятия равенства отрезков и равенства углов определяются через понятия наложения, то аналогичное верно и для них. «Наложения» предполагают участие операторов, их осуществляющих, то есть объектов, внешних по отношению к самим «мирам», описываемым, например, евклидовой геометрией.

— То геометрическое содержание, которое мы имеем в виду, говоря о наложениях и равенстве, необходимо выразить в чисто геометрической форме, то есть либо определить его через введённые первопонятия геометрии, либо ввести новые первопонятия и аксиомы, выражающие свойства этих новых первопонятий и отношений между ними и другими, уже введёнными первопонятиями.

— Первый вариант едва ли возможен. Так что остаётся искать способ реализации второго.

— Но как реализовать второй вариант, если представляемый геометрией идеальный «мир» должен рассматриваться как нечленимое целое, если о наложениях одних его элементов на другие невозможно и говорить?

— А что если наложение, например, отрезка l на отрезок m понимать как результат отображения «мира» на себя, при котором l отображается на m? А отображение «мира» на себя естественно понимать как изменение позиции наблюдателя этого «мира».

— Кажется, это хорошая идея. И естественная. Давайте попытаемся её обыграть. Для этого в качестве первопонятий будем рассматривать не только понятия точки и прямой, но и понятие отображения пространства на себя, при котором точки отображаются в точки, отрезки в отрезки, прямые в прямые, лучи в лучи. Условимся такие отображения называть преобразованиями пространства.

[10] **Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И.** Геометрия. 7–9 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2007.

[11] Заметим, что обращение к идее наложения — это проявление наглядно-образного мышления на базе опыта работы предшествовавшего ему наглядно-действенного мышления.

— При этом естественно добавить следующие аксиомы:

1) Для всяких лучей ***m*** и **p** существует преобразование, переводящее **m** в **p**.
2) Для всякого преобразования существует обратное ему преобразование.

Ясно, что из условия 1 следует, что для всяких точек М и Р существует преобразование, переводящее М в Р.

— Естественно также исходить из следующего понимания равенства отрезков и углов:

Отрезки (углы) называются равными, если существует преобразование, переводящее какой-нибудь из них в другой.

Две фигуры называются равными, если существует преобразование, при котором образом какой-нибудь одной из них будет другая.

— Вот как приведённое доказательство преобразуется в доказательство той же теоремы в рамках новой системы первопонятий и аксиом.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы **A** *и* ***A_1*** (при вершинах *A и A_1) равны. Докажем, что эти треугольники равны.*

Так как углы ***A*** и **A_1** равны, то существует преобразование плоскости, переводящее угол **A** в угол **A_1** так, что образом вершины А будет вершина A_1, а образами сторон АВ и АС будут отрезки *A_1B_1 и A_1C_1, расположенные на образах лучей АВ и АС. Поскольку отрезок АВ равен* отрезку *A_1B_1 и отрезок АС равен отрезку A_1C_1, то образом стороны АВ будет сторона A_1B_1, а образом стороны АС — сторона A_1C_1. Значит, образом точки В будет точка B_1, а образом точки С — точка C_1. Следовательно, образом стороны ВС* будет *сторона B_1C_1. Итак, образами вершин треугольника АВС будут вершины треугольника $A_1B_1C_1$. Значит, эти треугольники равны.*

— Это действительно доказательство в рамках геометрии как аксиоматической теории. Но меня смущает слишком широкое понимание преобразования, положенное в основу такой геометрии. Ведь существуют же преобразования, переводящие лучи в лучи, но не сохраняющие ни величины углов, ни длины отрезков. Так что при таком понимании преобразования любые два отрезка будут равны и любые два угла тоже, а значит, будут равны все треугольники.

— Однако если под преобразованиями понимать всевозможные параллельные переносы и повороты и их композиции, что и соответствует изменениям позиции наблюдателя, то рассматриваемая теорема будет иметь привычный смысл. Условимся так их и понимать.

— Имеет смысл рассматривать и преобразования более широких видов как соответствующие изменениям не только позиции наблюдателя, но и используемых им визуальных средств.

Конечно, это может приводить не только к иным геометрическим «мирам» с теми же свойствами, но и к существенно иным «мирам», к иным геометриям[12].

— Таким образом, аксиоматизация геометрии приводит к новому положению дел: если отправной предмет нашего изучения представлял геометрию (на плоскости) как теорию, строившуюся на базе становившихся всё более привычными для нас представлений, то, облачившись в форму аксиоматической теории, эта теория обрела новое качество. А именно она стала относиться ко многим разным геометрическим «мирам». При разных интерпретациях её первопонятий она становится описанием разных геометрических миров (в частности, разных «фрагментов» привычного мира).

— И поскольку эти разные миры обладают, вообще говоря, разными свойствами, использование в рассуждениях, претендующих на роли доказательств теорем аксиоматической геометрии, привычных представлений, привычных пониманий первопонятий может привести к грубым ошибкам. Доказательства таких теорем должны носить чисто логический характер. Они должны быть результатами абстрагирования от каких бы то ни было

[12] К существенно иным геометриям приводят конечно же и далеко идущие трансцендирования. К ним приводят и соображения, подсказываемые не прямой практикой, а теоретическим и метатеоретическим планами, развиваемыми в процессах восхождения к аксиоматическим геометриям.

геометрических представлений и представлять собой чисто логические выводы из условий этих теорем и формально понимаемых аксиом теории. В «чистом» виде такие выводы становятся достижимыми при выражении аксиом на каком-либо «машинном» языке и представлениях доказательств в виде тех или иных цепочек «машинных» процедур.

— Но средствами поиска и построения таких цепочек могут служить обычные доказательства теорем. Уже имеющиеся знания, относящиеся к евклидовой геометрии, и наша геометрическая интуиция оказывают значительную помощь при решении вопросов о том, являются ли те или иные утверждения, относящиеся к геометрии на плоскости и записанные на «машинном» языке, теоремами рассматриваемой аксиоматической теории.

И это также значимый аргумент в пользу того, что «наивные» формы мышления должны участвовать в учебной деятельности и развиваться, взаимодействуя с «высшими» его формами, не только на начальных её стадиях, но на всём её протяжении как неотъемлемые компоненты теоретического мышления, обеспечивающие его полнокровное функционирование и развитие.

— Не могу не признать, что проделанная работа привела к значительным продвижениям в решении поставленной задачи. Но не могу и не заметить, что с точки зрения «машинного» уровня точности пока не всё в порядке. Я имею в виду то, что используемое нами понятие луча не доведено до «машинного» уровня выражения. Либо мы должны рассматривать его как первопонятие, и тогда необходимы аксиомы, выражающие свойства его отношений с другими первопонятиями, либо необходимо его выражение через имеющиеся первопонятия.

— Похоже, что нет нужды рассматривать его как первопонятие. Оно может быть выражено через первопонятия точки и прямой, например так.

Пусть O — начало рассматриваемого луча, A — какая-нибудь его точка, отличная от O. Согласно первой же аксиоме геометрии, существует единственная прямая, на которой лежат O и A. Наш луч есть часть этой прямой, характеризуемая теми её точками M, которые либо лежат между O и A, либо таковы, что A лежит между O и M. Таким образом, луч может быть задан любой упорядоченной парой (OA), такой, что O-его начальная точка, а A — какая-нибудь его не начальная точка.

— Такое определение понятия луча использует отношение «лежать между» для троек точек, расположенных на одной и той же прямой. Но как определить само это отношение через первопонятия точки и прямой? Да и возможно ли это?

— Независимо от того, возможно ли это, представляется удобным рассматривать это отношение как первоотношение, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A1. Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит между точками C и A.

A2. Если точка B лежит между точками A и C, то A, B и C — три различные точки, лежащие на одной прямой.

A3. Для всяких точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.

A4. Для любых трёх различных точек, лежащих на одной прямой, в точности одна из них лежит между двумя другими.

*Эти аксиомы имеют «машинный» характер, и потому их использование при проверке гипотез и в доказательствах теорем не нуждается в понимании того, что такое **точка,** что такое **прямая** и что такое **лежать между**. Оно осуществимо как цепочки «машинных» процедур.*

— Похоже, мы приблизились к завершению решения задачи аксиоматизации евклидовой геометрии на плоскости.

— Мы заметно продвинулись в этом направлении. Но не настолько, чтобы располагать, например, «машинным» доказательством теоремы Пифагора.

— Это так. Для этого необходимо ввести аксиомы, обеспечивающие возможность измерения длин отрезков и углов. В частности, ввести аксиомы, обеспечивающие возможность превращения всякой прямой в числовую прямую.

Приведённый фрагмент сценария помогает понимать — то, в чём видят работу теоретического мышления в смысле В.В. Давыдова[13], представляет собой взаимодействие разных форм мышления, и «высших», и «низших», в котором стратегический план выполняет направляющую (в том числе контролирующую и корректирующую) роль.

Конечно же, процесс аксиоматизации евклидовой геометрии даже в классах с углублённой математической подготовкой не должен осуществляться полностью, то есть завершаться построением удовлетворительной аксиоматики и подтверждениями её удовлетворительности. Представляется, что в общеобразовательных классах естественно ограничиться шагами, подобными описанным в приведённом фрагменте сценария.

Уже этот фрагмент сценария показывает, что такое первичное приобщение учащихся к аксиоматическому методу возможно и целесообразно: оно существенным образом помогает их восхождению на надпредметный и метапредметный уровни и посредством этого несёт более далеко идущее математическое, а с ним и логическое развитие, более далеко идущее приобщение к методологии математической деятельности. И тем самым открывает возможность следования целям общего образования, отражённым в стандартах нового поколения.

Имеются учебники, представляющие хорошие образцы обучения геометрии как *прото-аксиоматической теории*, обучения, способствующего более качественному усвоению геометрических знаний и логическому развитию учащихся. Но тот ли это уровень развития, который способствует постижению ими существа аксиоматического метода? Способствует ли обучение по таким учебникам развитию теоретического мышления, то есть мышления, «внутренне связанного с исследованием природы своей собственной основы»[14]. Побуждает ли оно учащихся к восхождению на надпредметный и метапредметный уровни мыследеятельности, необходимому для развития их теоретического мышления? Способствует ли оно такому логическому развитию учащихся, такому развитию используемой ими логики, точнее говоря, протологики, которое приводило бы их к осознанию необходимости движения к логике формальной как к очищенной, идеальной форме протологики, к осознанию идеальной надёжности выводов, строящихся в рамках такой логики? Способствует ли оно такому исследованию привычного пространственного мира, которое использовало бы сопоставления его с другими, возможными пространственными мирами, или, что то же, сопоставления привычного способа «видения» этого мира с другими способами его «видения», то есть сопоставления разных «семантик» для традиционного «синтаксиса» школьной геометрии?

Существенное различие природосообразного процесса аксиоматизации геометрии и природосообразного процесса формирования, например, строгого понятия предела функции в точке и условий, в которых они осуществляются, состоит в том, что второй происходит вместе с развёртыванием прототеории, представляемой протопонятием предела, тогда как процесс аксиоматизации евклидовой геометрии и посредством этого приобщения к аксиоматическому методу естественно и продуктивно осуществлять на базе уже выстроенной прототеории и апеллировать к ней как к целому.

Работа по аксиоматизации сопровождается более глубоким проникновением учащегося в когнитивный план, направленностью на осознание того, что имеется в виду и существенно используется, но не осознавалось, и на поиск адекватного и продуктивного формального выражения этих сторон дела. Такой поиск осуществляется при напряжённом соотнесении этой задачи с целостностью прототеории. Всем этим оправдывается бытующий характер учебников геометрии как приобщающих к такой прототеории. Этим объясняется и неэффективность попыток выстраивать процесс обучения геометрии сразу на аксиоматической основе.

Процесс аксиоматизации геометрии — намного более сложный, чем процессы формирования тех или иных отдельных понятий школьного курса математики. Но именно он в должной мере способствует реализации цели образования, соответствующей стандар-

[13] **Давыдов В.В.** Теория развивающего обучения. М.: Интор, 1997.

[14] Там же. С. 62.

там нового поколения. Такой процесс помогает и осознанию того, что стереотипы мышления, ограничивающие познавательные и творческие возможности, рождаются не только обыденным опытом, но и опытом научной деятельности, и что поэтому продуктивный путь развития личностного и профессионального — это путь, сопровождающийся самопознанием и самопреодолениями.

Природосообразное, продуктивное освоение аксиоматической теории — это освоение её как продуктивной модели прототеории, являющейся её историческим или конструируемым истоком. Этим обеспечивается ведомость процесса её освоения механизмами понимания, развивающимися вместе с этим процессом. И потому процесс её освоения должен начинаться с освоения и развития прототеории и практики её применения[15].

Ещё раз подчеркнём, что и приведённый фрагмент сценария показывает, что «наивные» формы мышления должны участвовать в учебной деятельности и развиваться, взаимодействуя с «высшими» его формами, не только на начальных её стадиях, но на всём её протяжении как неотъемлемые компоненты теоретического мышления, обеспечивающие его полнокровное функционирование и развитие.

Этот фрагмент показывает также, что восхождение к аксиоматической теории — это и освоение предметно-методологического начала, заложенного в ней самим историческим процессом её формирования. Это и освоение общеметодологического начала, заложенного в процессе её формирования и развития, освоение метапредметного начала, заложенного в логике этого процесса.

И, наконец, он показывает, что продуктивное освоение аксиоматической теории требует сообразования с идеей развития, сопровождающегося преображениями способа мыследеятельности, то есть коренными изменениями её содержания, формы, направлений и самих её целей, освоением новых механизмов понимания.

Доказательства, предлагаемые школьникам, носят «ситуативный» характер и опираются на такие «аргументы», которые «имеются в виду» и часто не осознаются. Вместе с тем, более основательное осуществление начала процесса восхождения на аксиоматический уровень изучения геометрии несёт возможность преображения такого положения. Выделение тех протопонятий, роль которых играют геометрические «первообразы», на обращении к которым основываются открытия прото-теорем, открываемая возможность разных «реалистичных» их представлений (интерпретаций), а значит, разных форм идеализации — всё это ведёт к достижению понимания аксиоматизации как творческой деятельности, направленной на построение идеальной модели пространственных представлений, являющейся *одной из многих* возможных продуктивных моделей такого рода. Всё это и есть внесение в обучение гуманитарного начала, несущее понимание существа аксиоматического метода, а с ним и понимание места и роли формально-логических средств в его реализации. Всё это приобщает учащихся к *стратегиям* поисково-исследовательской деятельности, способствует постижению ими природы математики, природы культурной математической деятельности, открывает перед ними внутреннюю необходимость и продуктивность принципа *от неразвитого целого — к развиваемому и преображаемому целому*.

Как мы заметили выше, человеческое мышление склонно к неосознаваемой идеализации. Обыденные представления о линиях, поверхностях, точках являются зримыми примерами такой идеализации. Восхождение к аксиоматической геометрии — это восхождение от обыденного идеального к развитому идеальному. (То же верно в отношении процессов восхождения к строгим понятиям предела, непрерывности и многим другим математическим понятиям.)

Приведённый фрагмент сценария заставляет видеть, что *не столько приобщение к самой аксиоматической геометрии, сколько осуществление процесса её формирования, даже не полностью осуществляемого, несёт развивающее начало и снимает трудности в приобщении школьников к аксиоматическому методу*. ❑

[15] **Когаловский С.Р.** К проблеме модернизации математического образования // Наука и школа. 2011 № 2. С. 55–57.