

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВРИСТИКИ «СДЕЛАЙ ЧЕРТЁЖ»

Сулейманов Ринат Рамилович,

кандидат педагогических наук, доцент, член-корреспондент Академии информатизации образования, г. Уфа

- эвристика • метод подбора • метод введения переменной • поиск закономерности
- «сделай чертёж»

В СТАТЬЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВРИСТИКИ «СДЕЛАЙ ЧЕРТЁЖ». А ТАКЖЕ ЭВРИСТИКИ: МЕТОД ПОДБОРА, МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ПОИСК ЗАКОНОМЕРНОСТИ. ПРИВОДЯТСЯ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭВРИСТИКИ «СДЕЛАЙ ЧЕРТЁЖ». МАТЕРИАЛ ПРЕДНАЗНАЧЕН ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ, МЕТОДИСТОВ, СТУДЕНТОВ, ИНТЕРЕСУЮЩИХСЯ МЕТОДИЧЕСКИМИ ВОПРОСАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Под эвристикой мы понимаем область исследования методов решения задач. Рассмотрим эвристики, которые использовались при составлении приведённых ниже учебных задач. При их решении эвристики могут использоваться как одиночно, так и в комбинации. Ниже приведены эвристики, которые использовались при решении задач с использованием эвристики «сделай чертёж».

Эвристика. Метод подбора

Случайный подбор. Решение находится путём проб и ошибок: сначала проверяется одна произвольная комбинация, затем другая, пока случайным образом не будет найдено правильное решение.

Последовательный подбор. Предполагает начало решения задачи не с произвольной комбинации, а с последовательного анализа условия задачи.

Целенаправленный подбор отличается от предыдущих тем, что комбинации подбираются исходя из определённого условия. Метод подбора эффективен в тех случаях, когда:

- достаточно прозрачна и понятна идея решения;
- есть возможность перебрать все варианты решения;
- в задаче содержится конечное количество вариантов поиска решения.

Эвристика. Метод введения переменной

Метод введения переменной эффективен в тех случаях, когда:

- в условии задачи содержится фраза «для любого (каждого)»;
- в условии задачи представлено большое количество вариантов или ситуаций;
- задача не может быть решена другим способом, кроме составления уравнения;
- решение задачи требует доказательства и рассмотрения общего случая.

Эвристика. Поиск закономерности

Применение эвристики «поиск закономерности» эффективно в тех случаях, когда:

- задан массив чисел;
- задана какая-нибудь числовая последовательность;
- информация, данная в условии задачи, может быть организована в форме числовой таблицы или последовательности;
- по условию требуется сделать какое-то числовое обобщение.

Эвристика. Сделай чертёж

Эвристический приём «сделай чертёж» используется при решении задач, в которых:

- представлена практическая ситуация, которую легко визуализировать;

- содержится геометрический материал;
- чтобы лучше понять условие задачи;
- возможно наглядное представление информации;
- дополнение к рисунку;
- преобразование рисунка;
- обобщение данных к рисунку.

Задача о кросс-суммах

Рассмотрим следующую задачу: в 10 кружках, расположенных вдоль сторон и радиусов равностороннего треугольника (рис. 1) можно разместить десять натуральных чисел от 1 до 10 так, что сумма чисел, расположенных по сторонам и углам каждого из трёх маленьких треугольников будет равна одной и той же сумме K (константе кросс-суммы для данной фигуры).

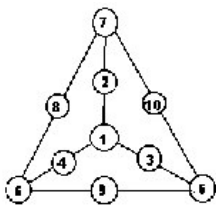


Рис. 1. Задача о кросс-сумме

На рис. 1 показан один из способов расположения 10 чисел $1+2+7+8+6+4=1+4+6+9+5+3=1+3+5+10+7+2=28$. Здесь константа кросс-суммы равна 28.

Определить константы и количество треугольников, удовлетворяющих вышеуказанным «магическим условиям».

Решение задачи о кросс-суммах сводится к рассмотрению перестановок первых N натуральных чисел с проверкой «магических» свойств перечисленных фигур, т.е. к использованию эвристик: «Сделай чертёж», «Метод введения переменных», «Метод подбора», «Метод проверки закономерности». Сделай чертёж и метод введения переменных (рис. 2).

Метод подбора. Организуем перестановки чисел от 1 до 10.

Метод проверки закономерности. Проверка «магических» условий, если выполняются условия: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=a_3+a_4+a_5+a_9+a_8+a_{10}=a_1+a_6+a_5+a_9+a_8+a_7$.

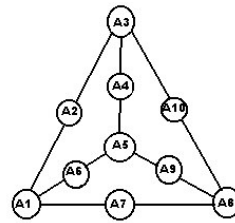


Рис. 2. Эвристики. Сделай чертёж и метод введения переменных

Головоломка «Цветной квадрат»

Головоломки «Цветной треугольник». На узлах правильной треугольной сетки в треугольнике (с n узлами на стороне) расставить фишки n цветов так, чтобы на линиях сетки, параллельных сторонам, не было одноцветных фишек.

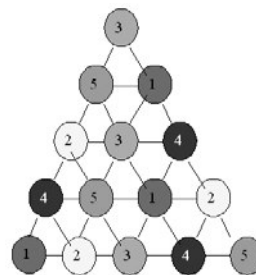


Рис. 3. Решение головоломки «Цветной квадрат» для $n=5$

На рис. 3 показано одно из решений данной головоломки для $n=5$. Фишки из n цветов обозначены через 1, 2, .., n .

Очевидно, что самое простое решение головоломки «Цветной треугольник» для $n=5$ организация 15 вложенных циклов с проверкой условия «Цветной треугольник». Данное решение будет носить частный характер. Опишем решения головоломки «Цветной квадрат» в общем виде.

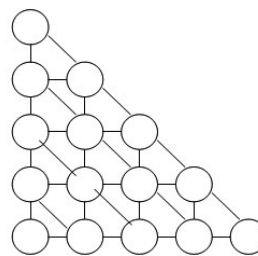


Рис. 4. Эвристика «Сделай чертёж». Видоизменение рисунка головоломки «Цветной треугольник»

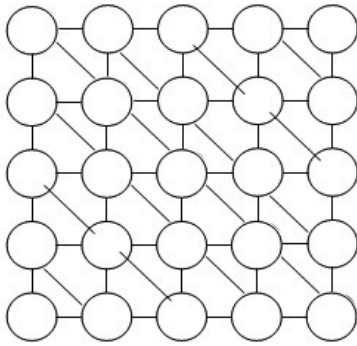


Рис. 5. Эвристика «Сделай чертёж». Видоизменение рисунка 4 до головоломки «Цветной квадрат»

Эвристика сделай чертёж. Видоизменение рисунка головоломки «Цветной треугольник» до рис. 4. Видоизменение рис. 4 до головоломки «Цветной квадрат».

Метод введения переменных. Количество различных цветов, массив фишек, расположенных на узлах «Цветного квадрата». Получили головоломку «Цветной квадрат», удовлетворяющий следующему условию: расставить фишки n цветов так, чтобы на линиях сетки, параллельных сторонам и одной из диагонали квадрата, не было одноцветных фишек.

Организация перестановок. Генератором перестановок без повторения формируем всевозможные строки «Цветного квадрата».

Организация размещений. Организуем размещение из K строк по N ; для этого используем генерацию сочетаний без повторения номеров строк массива с последующим использованием процедуры перестановок без повторения.

Метод проверки закономерности. Проверка условия, что соседние «фишки» не были одного «цвета».

Задача о мейандрах

Рассмотрим следующую задачу: шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада также на восток. Занумеруем мосты в порядке их следования вдоль шоссе (с запада на восток). Проплывая под мостом вниз по реке, мы будем встречать их, вообще говоря, в другом порядке.

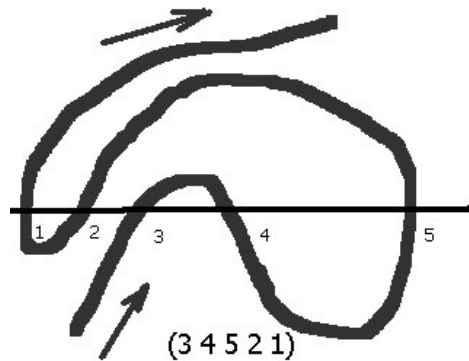


Рис. 6. Нумерация мостов к задаче о мейандрах

Так, например, река на рис. 6 проходит мосты в порядке 3, 4, 5, 2, 1. Таким образом, эта река определяет перестановку чисел от 1 до 5: (3 4 5 2 1). Ясно, что другая река могла бы протекать иначе и задавать другую перестановку чисел (мостов) может быть реализована так. Мы будем называть перестановку мейандром, если её можно задать с помощью подходящей реки.

Основной вопрос для нас будет такой: сколько существует различных (т.е. сколько перестановок номеров реализуется), если общее число мостов равно n ?

Общая формула $a(n)$ неизвестна. Число различных мейандров с n мостами обозначается через $a(n)$. Некоторые свойства:

- река впервые пересекает шоссе под мостом, номер которого нечётен;
- номера 1-го, 3-го, 5-го, .. мостов (вдоль реки) нечётны, если нумеровать мосты вдоль шоссе, а номера 2-го, 4-го, .. мостов – чётны.

На рис. 7 приведены примеры мейандров.

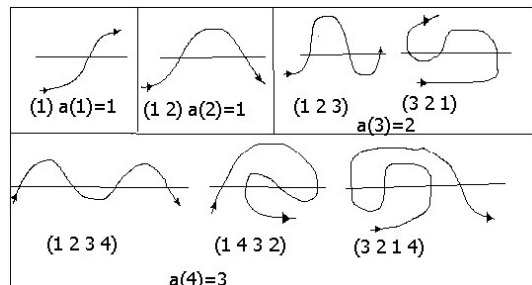


Рис. 7. Примеры мейандров

Рассмотрим меандр (3 2 1 4). Используем эвристику «Сделай чертёж», представим данный меандр в виде ломаной (рис. 8).

Эвристика «Сделай чертёж». Меандр в виде ломаной. Начало, конец и повороты ломаной расположены на узлах сетки (повороты на 90 градусов).

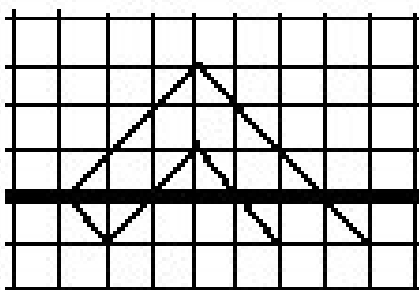


Рис. 8. Меандр в виде ломаной

Дальнейшие действия опишем в виде алгоритма.

1. Генератором перестановок без повторения формируем всевозможные перестановки мостов.
2. Удаляем те перестановки, которые не отвечают свойствам (которые перечислены выше):
 - река впервые пересекает шоссе под мостом, номер которого нечётен;

– номера 1-го, 3-го, 5-го,.. мостов (вдоль реки) нечётны, если нумеровать мосты вдоль шоссе, а номера 2-го, 4-го,.. мостов – нечётны.

3. Представляем потенциальный меандр в виде ломаной. Вычисляем вершины ломаной.
4. Производим проверку пересечения отрезков ломаной (как векторное произведение), если отрезки не пересекаются, то исходная перестановка – меандр.
5. Вывод результата – меандра (номера мостов), количество меандров.

Тексты программ решений рассмотренных задач приведены в источнике [2]. □

Литература

1. Методика решения учебных задач средствами программирования: метод. пос. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
2. Компьютерное моделирование математических задач: уч. пос. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
3. *Пойа Дж.* Как решать задачу / Дж.Пойа. – М.: Наука, 1966.
4. *Пойа Дж.* Математическое открытие / Дж. Пойа. – М.: Наука, 1976.
5. *Пойа Дж.* Математика и правдоподобные рассуждения / Дж. Пойа. – М.: Наука, 1976.