ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ

***Клепиков Валерий Николаевич**,*
кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Институт изучения детства, семьи и воспитания» РАО, учитель математики и этики МБОУ СШ № 6, г. Обнинск, Klepikovvn@mail.ru

• эвристический метод • эвристический поиск • эвристическая энергия
• степень креативности • эвристическое пространство • концептуальная идея
• комплекс эвристических задач • стратегия решения эвристической задачи
• математическая картина мира

Культурно-историческая цель математики заключается в том, чтобы служить колыбелью для новых идей и методов, которые впоследствии проникают в другие сферы культуры и нередко начинают играть в них значимую роль.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИКЕ – ЭТО НЕ ПРОСТО НЕЧТО ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ И УВЛЕКАТЕЛЬНОЕ, НЕ ТОЛЬКО ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО ПО ПРОХОЖДЕНИЮ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЛАБИРИНТОВ, НО И НЕКИЙ ДУХОВНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ПО ОСВОЕНИЮ И РАЗВИТИЮ ВНУТРЕННЕГО МИРА ЧЕЛОВЕКА, ПОСТРОЕНИЮ ЕГО ИНДИВИДУАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ МИРА. ПОЭТОМУ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕОБХОДИМЫ НЕ ТОЛЬКО МАТЕМАТИКАМ, НО И ЛЮДЯМ, СТРЕМЯЩИМСЯ ПОВЫСИТЬ СВОЙ ОБЩЕКУЛЬТУРНЫЙ УРОВЕНЬ.

За последние годы школьная математика обогатилась и обогащается многими содержательными линиями: практическая, историческая, метапредметная, эстетическая, экологическая, экономическая, этическая, художественная, сакральная, эвристическая, философская и т.д. Все данные линии придают математике дополнительные привлекательные черты, если, конечно, математическое образование не выхолащивается и не сводится лишь к подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации.

Одним из важнейших содержательных компонентов является эвристическая линия, которая недостаточно разработана и именно ей мы уделим основное внимание в предлагаемой статье.

Эвристическая линия разрабатывалась такими математиками, как Д. Пойя, М.Б. Балк, Л.М. Фридман, П.М. Эрдниев, Г.И. Саранцев, М.Ю. Шуба и др. Благодаря им в методике учителей математики появились такие приёмы, как «приём моделирования», «приём привлечения более простых, сходных, вспомогательных, стандартных или ранее решённых задач», «приём рассмотрения предельного случая», «приём вспомогательной фигуры», «приём замены переменных», «приём достраивания или дополнения», «приём замены математического объекта равносильным», «приём переформулировки», «приём контрпримера», «приём малых шевелений», «приём умозаключения по аналогии», «приём перевода с одного языка на другой», «приём игры с объектами», «приём укрупнения дидактических единиц» и т.д. Конечно, мы учитывали идеи вышеприведённых методистов, но для нас был более существенным несколько другой ракурс: сформулировать такие методы, которые бы способствовали эффективному формированию математической картины мира учащегося[1].

Существуют эвристические и неэвристические методы решения задач. В ходе решения задач они органично сосуществуют, взаимодействуют, взаимодополняют друг друга. Неэвристические методы связаны с ЗУНами, логическими процедурами, алгоритмами, различными схемами и заготовками,

[1] *Клепиков В.Н.* Формирование математической картины мира в современном школьном образовании // Педагогика. – 2017. – № 3. – С. 49–56.

знаками и кодами и т.п.[2], т.е. преимущественно с репродуктивным воспроизводством информации. Эвристические методы ассоциируются с креативностью и интуицией, спонтанностью и воображением, личностными образами и моделями, исследовательскими и проектными компетенциями, т.е. в основном с генерированием продуктивных знаний. При этом эвристические методы связаны не только с интуицией, но и с творческими навыками (умение ставить проблему, выдвигать гипотезу, предвидеть различные ходы, комбинировать различные элементы объекта, выявлять наиболее эффективные пути решения и т.д.). Эвристические и неэвристические методы в ходе решения задач взаимозависимы, взаимообусловлены и взаимодействуют.

К признакам неэвристических (формальных) методов относятся: логичность, алгоритмичность, дедуктивность, схематичность, аналогичность, детерминированность, предсказуемость, типичность и т.п. К признакам эвристических методов относятся: дополнительность, ассоциативность, вариативность, проблемность, пластичность, динамичность, комбинационность, межпредметность, диалектичность и т.д. Очевидно, что успех применения эвристических методов зависит от того, в какой мере сформировался специфический язык их понимания, и сложилась опосредованная им многоуровневая языковая структура.

Конечно, эвристические методы отрабатываются, прежде всего, на соответствующих проблемных задачах. Поэтому не случайно в истории математики знание развивалось благодаря вновь и вновь изобретаемым задачам, например, таким как: софистические задачи, задача на квадратуру круга, задача на трисекцию угла, задача на удвоение куба, задача на деление отрезка в крайнем и среднем отношении, задача на вычисление площади криволинейной фигуры, задача на построение правильного пятиугольника или семиугольника, двадцать три проблемы Гильберта и т.п. Они нацеливали математиков на решение новых, более сложных проблем, и тем самым «заставляли» непрерывно эволюционировать. В этой связи в контексте школьного образования вполне современно звучит мысль математика Д. Пойя о том, что «математический опыт учащегося нельзя считать полным, если он не имел случая решить задачу, изобретённую им самим».

На наш взгляд, решение и создание задач возможно только в условиях существования определённого эвристического пространства, интеллектуальное напряжение которого создают такие языковые конструкции, как математические диады: *целое – часть*, *рациональное – иррациональное*, *конечное – бесконечное*, *симметричное – асимметричное*, *моделирование – комбинирование*, *прямое – обратное* и т.п. Данные диады являются как бы теоретическими генераторами, задающими конкретную проблематику и выводящими на возможное решение проблемы. Более того, именно эти понятия, в первую очередь, и формируют математическую картину мира учащегося.

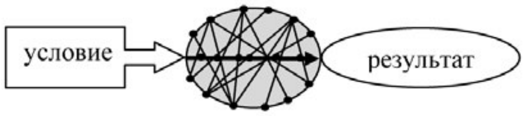
Определённым разрешением противоречия, которое задаёт диада, является дополнительное понятие, преобразующее диаду в триаду. Например, диада *равное – неравное* трансформируется в триаду *равное – неравное – подобное,* диада *часть – целое* преобразуется в триаду *часть – доля – целое*, диада *конечное – бесконечное* преобразуется в триаду *конечное – бесконечное – предельное*, диада покой – *движение* трансформируется в триаду *покой – движение – преобразование,* диада *прямое – обратное* трансформируется в триаду *прямое – обратное – противоположное,* диада *текст – контекст* преобразуется в триаду *текст – контекст – подтекст* и т.п.

Например, в знаменитой задаче на квадратуру круга вечную проблематику задают такие математические понятия, как рациональное и иррациональное, соизмеримое и несоизмеримое, алгебраическое – трансцендентное, число π и *1* (целое), отрезок – дуга и т.п. А если говорить о триаде, то линию понимания данного феномена инициируют понятия *рациональное – иррациональное – трансцендентное*.

На схеме показано, как возникает и функционирует эвристическое пространство, создавая области сгущения, где и происходит генерирование творческих идей. Точки с отрезками символизируют перекрёстное смысловое взаимодействие различных ди-

[2] *Гурова Л.Л.* Психологический анализ решения задач. – М., 1976.

ад и триад, которое создаёт дополнительные ресурсы по развитию стратегии решения задачи. Очевидно, что чем больше подключается различных диадных и триадных конструкций, тем больше вероятность решения задачи.



Например, решая задачу на квадратуру круга, человек рискует потерять много времени, если он опирается только на такие понятийные конструкции, как *целое – часть*, *круг – квадрат*, *циркуль – линейка*. Для понимания невозможности решения данной задачи требуются более сложные математические концепты, которые упоминались выше.

Важно отметить, что с развитием человека связаны именно эвристические методы, так как именно в них присутствует значительный субъектный, творческий фактор, не подвластный автоматизированным технологиям. Мы предлагаем вашему вниманию некоторые эвристические методы, разработанные нами, с опорой на прошлые достижения в этом направлении и в контексте формирования математической картины мира учащегося.

На наш взгляд, эвристическим методам больше учат не только различные названия самих методов и их суть, но и концептуальный анализ конкретных задач, точнее даже не единичных задач, а целых комплексов эвристических задач, которые обладают эвристическим потенциалом и эвристической энергией, переводящей мысль учащегося на новый уровень его развития.

Мы надеемся, что нижеприведённые методы и задания на первом этапе помогут привнести в обычные уроки эвристические моменты. Затем подобные задачи с помощью эвристических методов можно конструировать самим, чтобы овладеть «магией» создания стандартных и нестандартных задач. При этом важно постепенно наращивать степень креативности задач с прицелом выхода на серьёзные математические проблемы и идеи.

По нашему мнению, решение эвристических задач не должно быть только ради решения задач, но и для подведения их под некоторую концептуальную идею, так как именно концептуальные идеи составляют основу математической культуры учащегося.

Для демонстрации методов и приёмов мы взяли занимательные задачи так сказать общекультурного характера, которые могут быть интересны не только тем, кто непосредственно занимается математикой, но и тем, кто стремится повысить свой общекультурный уровень. В ходе погружения в проблемное поле задачи нужно осуществить эвристический поиск метода, который станет ключом к решению задачи.

Метод выявления и гармонизации частей и целого математического объекта

Метод выявления и гармонизации частей и целого математического объекта в общефилософском аспекте отражает диалектику целого и части, которую наиболее полно выражает триада *целое – доля – часть*. И если мы начинаем решать и изобретать задачи в контексте данной триады, то желательно выдерживать следующую концептуальную, сквозную линию:

1) целое может складываться из частей (например, 5 + 3 + 1 = 9) или, например, быть получено с помощью возведения части в степень (например, $3^2 = 9$) и т.д.;
2) целое и часть могут соотноситься друг с другом посредством доли (доля $^1/_4$ связывает часть – 15 и целое – 60) и результатом будет пропорция;
3) целое (единичный отрезок) и часть невозможно задать, выделить, соотнести, обнаружить, если мы имеем дело с иррациональными числами;
4) целое и часть соотносятся наиболее гармоничным образом посредством «золотого сечения»: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ (целое относится к большей части, как большая – к меньшей);
5) бесконечное число частей может стремиться к целому (например, сумма последовательности 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... стремится к пределу, равному 1);
6) целое и часть могут взаимодействовать друг с другом посредством дифференцирования и интегрирования;

7) целое и часть могут соотноситься друг с другом вероятностным образом ($P(A)=\frac{m}{n}$, где m – число благоприятствующих событию A исходов, n – число всех элементарных равновозможных исходов, при этом степень достоверного события равна 1);
8) целое и часть взаимодействуют посредством фрактального самоподобия (например, площадь «ковра Серпинского» вычисляется по формуле:

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 64 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 + \ldots = 1)$$ и т.д.;

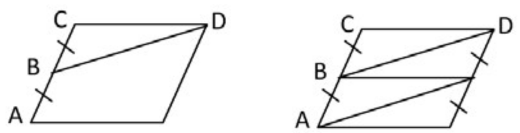
9) выработанная идея диалектики целого и части далее переносится в широкую общекультурную плоскость, где она постоянно насыщается современными коннотациями и является органичной составляющей математической картины мира человека.

Рассмотрим нижеприведённые задачи.

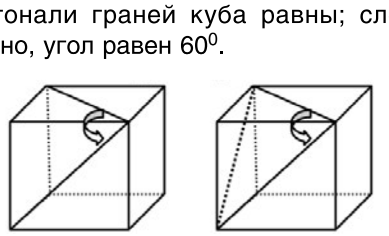
Идея разделения целого на части. Найти значение выражения:

$$\sqrt{15^4} = \sqrt{15^2} \cdot \sqrt{15^2} = 15 \cdot 15 = 225.$$

Ещё одна задача. Площадь параллелограмма равна 100. AB = BC. Найти площадь треугольника BCD. Ответ: 25. Объяснение: делим параллелограмм на четыре равные части.



Идея дополнения до целого. Найти угол между диагоналями граней куба. Ответ: 60^0. Объяснение: достраиваем первоначальную фигуру до треугольника (целое), который является равносторонним, так как диагонали граней куба равны; следовательно, угол равен 60^0.



Идея обнаружения двух (трёх и т.д.) целых. Цену товара повысили на 20%. Через некоторое время её понизили на 20%. Когда товар стоил дешевле: до повышения или после снижения? Ответ: после снижения. Объяснение: в задаче фигурируют два целых (две цены: бо́льшая и меньшая), относительно которых мы находим 20%.

Идея единого (однородного) целого. Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное. Ответ: это софистическая задача. Объяснение: в умозаключении обыгрывается уникальная ситуация, когда мы можем сказать, что полуполное есть полупустое.

Идея скрытого (неявного) целого. «Рыба весит 4 кг плюс половина её собственного веса. Сколько весит рыба?» Ответ: 8 кг. Очень часто ученики отвечают, что 6 кг. Объяснение: фразой «рыба весит 4 кг», где 4 кг – это только часть, делается попытка закамуфлировать вес всей рыбы (целое), который больше в два раза, т.е. делается попытка подменить часть целым. Подобная «интеллектуальная инерция» происходит и в том случае, когда ученик на «семью восемь» отвечает – сорок восемь.

Идея трансформации части в целое. Искомое число уменьшили на 50%. На сколько процентов нужно увеличить полученное число до первоначального? Ответ: на 100%. Объяснение: когда искомое число уменьшили на 50%, то получили часть в два раза меньшую от первоначального целого, но в последующем именно эта часть становится целым, относительно которого и находятся 100%.

Идея представления недостающей величины за целое (1). Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 60 км/ч и возвратился со скоростью 40 км/ч. Какова была средняя скорость его езды? Ответ: 48 км/ч. Объяснение: в данной задаче отсутствует расстояние, но так как оно одинаковое, то его можно взять за единицу, тогда $x = (1 + +1) : (1/60 + 1/40) = 48$ км/ч. Полученная величина называется средним гармоническим.

Идея неделимости живого целого. В чём смысл нижеприведённой притчи?

Как-то ночью, когда Насреддин сладко спал, жена растолкала его и говорит:
– Ребёнок целый час плачет, неужели ты не слышишь? Ведь он наполовину твой! Покачай его.

– Моя половина пусть плачет, – сказал Насреддин. – Успокой свою половину. С этими словами он повернулся к стене и заснул.

Объяснение: суть данной притчи состоит в том, что многие объекты мира (особенно – живые) невозможно буквально поделить на части, и если мы это делаем, то условно, фигурально, абстрактно: для исследования и понимания.

В решаемых и изобретаемых задачах на диалектику части и целого мы обнаруживаем следующие особенности: выдать часть за целое и наоборот, закамуфлировать (скрыть) целое, включить в задачу два (три и т.д.) неявных разных целых, изменить первоначальное целое и т.п.

Суть метода выявления целого и части заключается в следующих шагах:
1) выявить часть (части) и целое (целые);
2) установить соответствие между частью и целым;
3) обнаружить закономерность, которая объединяет часть и целое;
4) выйти на решение задачи.

Метод моделирования и преобразования математического объекта

Метод моделирования и преобразования математического объекта в общефилософском аспекте отражает диалектику покоя и движения, которую наиболее полно выражает триада *покой – движение – преобразование*. Для понимания данной триады мы используем знания о неизменных свойствах искомого объекта, симметрии, повороте, параллельном переносе и т.п. И если мы начинаем решать и изобретать задачи в контексте данной триады, то желательно учитывать следующие концептуальные идеи:

1) по необходимости рассматривать все возможные варианты существования математического объекта; если это геометрический объект, то и его проекции;
2) нужно быть готовым к комбинированию частей математического объекта и тем самым к проявлению его «скрытых» закономерностей;
3) нужно быть готовым к оптимальной трансформации математического объекта и тем самым к выявлению его сущностных свойств;
4) нужно быть способным дополнить математический объект эвристической частью или отвлечься от второстепенных деталей;
5) необходимо быть готовым к восприятию и анализу противоречивых математических объектов (например, софистических задач, геометрических фигур: лента Мёбиуса, бутылка Клейна, треугольник Пенроузов, гиперфигур и т.д.);
6) выработанная идея диалектики покоя и движения переносится в широкую общекультурную плоскость, где она постоянно насыщается современными коннотациями и является органичной составляющей математической картины мира человека.

Рассмотрим нижеприведённые задачи.

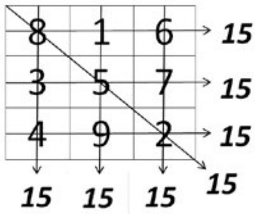
Идея опосредованного воздействия на объект. Как из трёх спичек, лежащих на столе параллельно, удалить из середины среднюю, не трогая её? Объяснение: не трогая среднюю спичку, перекладываем любую крайнюю, и тогда средняя оказывается крайней.

Идея исчерпывающего комбинирования. При каком расположении три двойки изображают наибольшее число:

$222, 2^{22}, 22^2, 2^{2^2}$. Ответ: 2^{22}.

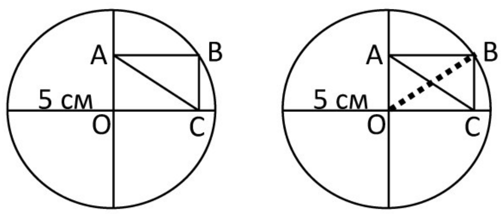
(Заметим, что можно взять и четыре двойки!) Объяснение: в ходе использования данного приёма очень важно рассмотреть все возможные ситуации различных конфигураций математического объекта.

Идея прямого и обратного комбинирования. Однажды учитель предложил ученикам третьего класса сложить числа от 1 до 10 включительно. Ответ последовал незамедлительно. Карл Гаусс назвал число 55. Но самое удивительное, что он нашёл наиболее простой способ решения этого примера. Во-первых, он мог решить так: $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 11 \cdot 5 = 55$. Во-вторых, он мог сложить не одну, а две суммы – прямую и обратную: $(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) + (6 + 5) + (7 + 4) + (8 + 3) + (9 + 2) + (10 + 1)$, заметив, что каждая пара чисел даёт одно и то же число 11. Затем всё оказалось очень просто: $(11 \cdot 10) : 2 = 55$.

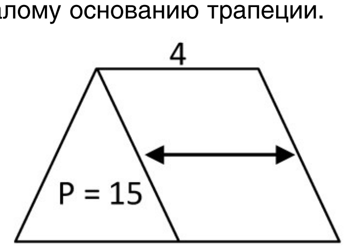


Идея закономерного комбинирования чисел. В специальную квадратную таблицу вставить числа, например, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 таким образом, чтобы сумма чисел вдоль любой из строк, столбца и диагоналей была равна определённому числу, у нас 15. В чём секрет? Как работает магический квадрат? Возможно ли это повторить с другим набором чисел?

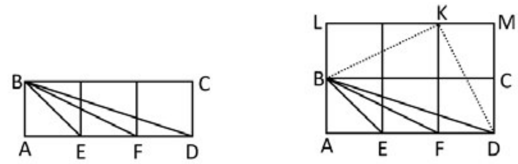
Идея органичного дополнения объекта эвристической частью. Радиус окружности равен 5 см. Найти длину отрезка АС. Ответ: 5 см. Объяснение: проведём дополнительный отрезок ОВ, который, как и отрезок АС, является диагональю прямоугольника: АС = ОВ = R = 5 см.



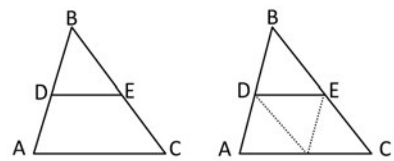
Идея мысленного переноса части объекта. Отрезок, проведённый параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найти периметр трапеции. Ответ: Р = 23. Объяснение: мы видим, что одна боковая сторона треугольника совпадает со стороной трапеции, а другая – параллельна и равна другой боковой стороне трапеции. До полной трапеции недостаёт двух отрезков, равных малому основанию трапеции.



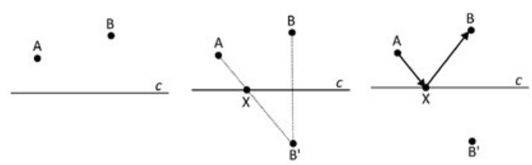
Идея дополнительного построения. Из трёх равных квадратов составлен прямоугольник. Из вершины В его проведены три отрезка: BE, BF и BD. Докажите (без применения тригонометрии), что сумма углов AEB, AFB, ADB равна 90^0. Пояснение: целесообразно достроить прямой угол BKD = 90^0, получим равнобедренный прямоугольный треугольник BKD, углы KBD и KDB по 45^0. По рисунку видно, что сумма перечисленных углов будет равна углу MDA.



Идея разбиения объекта на проясняющие части. В треугольнике АВС проведена средняя линия DE. Площадь получившегося треугольника BDE равна 5. Найти площадь фигуры ADEC. Ответ: 15. Пояснение: необходимо провести ещё две средние линии, в результате получим четыре равных треугольника, три из которых и образуют искомую фигуру.



Идея подключения вспомогательной части объекта. Даны две точки *А* и *В* и прямая *с*. Мы хотим попасть из точки *А* в точку *В*, пройдя через некоторую точку *Х* на отрезке *с*. Какой точке отрезка *с* соответствует кратчайшее расстояние? Объяснение: как известно, отрезок задаёт кратчайшее расстояние между двумя точками; значит, строим точке *В* симметричную точку *В'* относительно *с*, отрезок АВ' будет равен ломаной АХВ.



В решаемых и изобретаемых задачах на диалектику покоя и движения мы обнаруживаем следующие особенности: наиболее важный, ключевой элемент обычно «скрывается в лесу» второстепенных, заданный чертёж «взывает» к дополнительному построению, некоторые элементы целесообразно подвергнуть мысленному переносу или преобразованию и т.п.

Суть метода моделирования и преобразования математического объекта состоит в следующем: 1) наиболее полно выявить первоначальные свойства искомого объекта; 2) переструктурировать объект или дополнить уточняющими и проясняющими деталями; 3) обнаружить новые дополнительные свойства; 4) интегрировать первоначальные и вновь обнаруженные свойства; 5) использовать их совокупный потенциал для решения задачи.

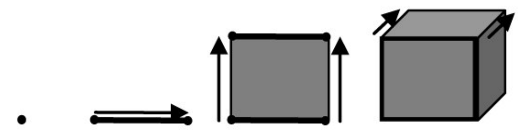
Метод перехода математического объекта в другое измерение

Метод перехода математического объекта в иное измерение в общефилософском аспекте отражает диалектику одномерного и многомерного, которую наиболее полно выражает триада *нульмерное – одномерное – многомерное*. Для понимания данной триады мы используем знания о многомерности мира и переходах из одного измерения в другое. И если мы начинаем решать и изобретать задачи в контексте данной триады, то желательно учитывать следующие концептуальные идеи:

1) каждый объект ограничен рамками того измерения, в котором он находится;
2) важно понимать динамику фигур от нульмерной точки до трёхмерной или даже четырёхмерной фигуры (гиперкуб, гипершар, гипертетраэдр и т.п.);
3) для демонстрации необходимости строгих доказательств важно демонстрировать софистические чертежи, на которых параллельные прямые кажутся непараллельными, равные фигуры – неравными и т.п.;
4) важно проводить эвристические аналогии, подчёркивающие специфику фигур, например, окружность относится к кругу, как сфера – к шару и т.п.;
5) желательно заострять внимание на фигурах, которые «застряли» в промежуточных измерениях (лента Мёбиуса, треугольник Пенроузов, фигуры в картинах Эшера и т.д.);
6) если задача не решается в заявленном измерении, то следует попробовать её решить в другом (бо́льшем или меньшем);
7) выработанная идея диалектики одномерного и многомерного переносится в широкую общекультурную плоскость, где она постоянно насыщается современными коннотациями и является органичной составляющей математической картины мира человека.

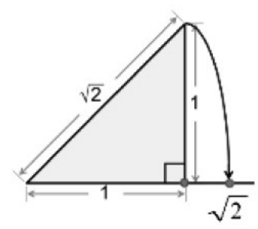
Рассмотрим нижеприведённые задачи.

Идея перехода в более высокое измерение. Какая геометрическая фигура получится, если точка сдвинется в определённом направлении, сохраняя «след»? Возникнет отрезок. А если сдвинется отрезок на соответствующее расстояние в перпендикулярном направлении? Получится прямоугольник. А если то же самое произойдёт с прямоугольником? Возникнет прямоугольный параллелепипед.

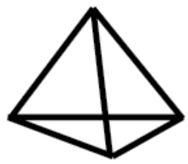


Идея трёхмерного мира. Почему древние греки не знали измерений, б льших трёх? Объяснение: древние греки понимали мир как нечто пространственное, телесное, объёмное, т.е. они могли создать представление о x^1, x^2, x^3, но что стоит за x^4? Действительно, а разве существует четвёртое измерение?! Интересно, что именно после греков остались вполне понятные и практичные высказывания «квадрат числа», «куб числа», но они совершенно не представляли себе таких абстракций, как x^4, x^5, x^6, и т.п.

Идея выноса части объекта в другое измерение. Отложить на числовой прямой $\sqrt{2}$. Объяснение: решить данную задачу в рамках, так сказать, одномерного измерения, невозможно, так как иррациональные числа не имеют единичного отрезка. Поэтому нужно построить в плоскости прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными 1. Зная, по теореме Пифагора, что гипотенуза в этом случае равна $\sqrt{2}$, с помощью циркуля переносим этот отрезок на числовую прямую.

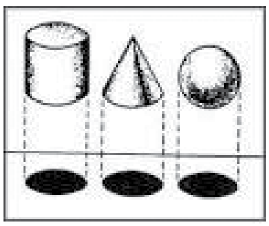


Идея комбинирования частей в другом измерении. Сколько равных треугольников



можно составить из шести спичек? Ответ: 4. Объяснение: данная задача не решается на двумерной плоскости, но легко решается в трёхмерном пространстве.

Идея получения проективных частей объекта. Какие фигуры в геометрии могут дать в проекции круг? Ответ: шар, цилиндр, конус. Объяснение: в геометрии известно, что проекции цилиндра, конуса и шара могут дать одну и ту же фигуру – круг, хотя это совершенно различные фигуры.



Идея «взлетевшего» элемента объекта. Можно предложить ребятам составить следующую задачу. Известно, что если точка М принадлежит прямоугольнику *ABCD*, то сумма квадратов расстояний от точки М до вершин B и D, т.е. $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Представим себе, что точка М «взлетела» над плоскостью, т.е. «вышла» в пространство. Будет ли сохраняться то же свойство? Ответ: да. Объяснение: это можно доказать и координатным, и векторным методами, заметив, что *MABCD* – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник.

Идея противоречивого взаимодействия двух измерений в одном объекте. Сколько измерений имеет треугольник Пенроузов? Обычный треугольник не существует в пространстве (это двумерная фигура), поэтому его невозможно «подержать в руке». В пространстве может существовать пирамида. У треугольника Пенроузов – странное существование: существуя как-то в плоскости, он явно «претендует» на существование и в пространстве. Отсюда получается раздвоение: по-настоящему он не существует ни в плоскости, ни в пространстве.

Таким образом, треугольник Пенроузов – и провокация, так как он претендует на «полноценное» существование как на плоскости, так и в пространстве, и геометрический парадокс, так как он заставляет почувствовать диалектику подлинного и мнимого, существующего и несуществующего, истинного и кажущегося.

Идея разных реальностей и смыслов. Сколько будет пять в квадрате, десять в квадрате? А чему равен угол в квадрате? Ответ: 25, 100, 90^0. Объяснение: в задачах важно отличать различные реальности и тот смысл, который вкладывается в слова; первый смысл – возвести во вторую степень, второй смысл – мера угла в геометрической фигуре. Приведём ещё одну задачу. Требуется полсотни разделить на половину. Сколько получится? Ответ: не 25, а 100! Объяснение: «на половину» – это не доля от целого, а просто число $^1/_2$.

В решаемых и изобретаемых задачах на диалектику одномерного и многомерного мы обнаруживаем следующие особенности: у нульмерной фигуры, т.е. точки, нет измерений (но есть мощный энергийный потенциал к «порождению» других фигур), у одномерных фигур мы можем вычислить только периметр, у двумерных – периметр и площадь, у трёхмерных – периметр, площадь и объём; очень важно понимать, при каких условиях фигура, существующая в одном измерении, трансформируется в фигуру, существующую в другом измерении; имеются законы существования объёмных фигур на плоскости (прямая перспектива и обратная и т.д.).

Суть метода перехода математического объекта в другое измерение состоит в следующем: 1) выявляем все потенциальные возможности, которыми обладает объект в заданном измерении; 2) обнаруживаем неспособность решить поставленную задачу в заданных условиях; 3) смещаем объект или часть объекта в иное измерение или в иную реальность; 4) обнаруживаем его дополнительные качества и свойства; 5) решаем поставленную задачу силами иного измерения или иной реальности.

Метод сопряжения в математическом объекте конечного и бесконечного

Метод сопряжения в математическом объекте конечного и бесконечного (включая рассмотрение предельного случая) отражает диалектику конечного и бесконечного, которую наиболее полно выражает триада *конечное – бесконечное – предельное*.

Давид Гильберт даже утверждал, что математика есть единая симфония бесконечного, т.е. каждый математический объект так или иначе мыслится в контексте бесконечности. В этом случае мы подключаем метод сопряжения конечного и бесконечного, который заключается в том, чтобы нечто (числовая последовательность, ряд, геометрическая фигура и т.п.) довести до своего логического предела или предельного случая, где математический объект приобретает новое качество, отличное от первоначального, например, правильный многоугольник переходит в круг, убывающая геометрическая прогрессия стремится к конкретному числу и т.п.

И если мы начинаем решать и изобретать задачи в контексте понятий «конечное» и «бесконечное», то желательно выдерживать следующие концептуальные идеи:

1) каждое действительное число имеет соответствующую точку на бесконечной числовой прямой, т.е. между ними существует взаимно однозначное соответствие, но не каждое число можно отложить относительно единицы (например, нельзя отложить трансцендентное число);
2) действительное число, в отличие от натурального и целого чисел, не имеет соседнего числа (точки) на числовой прямой, так как любое расстояние между двумя точками можно поделить, например, на два;
3) некоторые иррациональные числа можно отложить на прямой, используя прямоугольный треугольник (т.е. с использованием плоскости) и теорему Пифагора;
4) так как иррациональные числа являются бесконечными десятичными непериодическими дробями, то они вечно приближаются к своему точному значению, как к своему пределу, например, 2; 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182 ….. $\to e$;
5) бесконечности отличаются по мощности, например, мощность действительных чисел (несчётного множества или континуума) больше, чем мощность рациональных чисел (счётного множества); при этом различные конечные и бесконечные множества чисел можно сравнивать с помощью кругов Эйлера;
6) значительное количество графиков функций имеют асимптоту, т.е. прямую, к которой график вечно и бесконечно приближается, не пересекая её;
7) различают актуальную бесконечность и потенциальную бесконечность; актуальная бесконечность, по сути, даёт возможность оперировать с бесконечностью, как и с обычным числом, например, когда мы оперируем иррациональными числами, то мы их рассматриваем, как актуальную бесконечность («замкнутая бесконечность», «целая бесконечность»);
8) понятие актуальной бесконечности позволяет осуществлять операции дифференцирования (находить производную) и интегрирования;
10) выработанная идея диалектики конечного и бесконечного переносится в широкую общекультурную плоскость, где она постоянно насыщается современными коннотациями и является органичной составляющей математической картины мира человека.

Рассмотрим нижеприведённые задачи.

Идея наглядного перехода к большим числам. Согласно древней легенде индийский царь Шерам был восхищён новой игрой – шахматами и предложил её изобретателю – мудрецу Сете любую награду. Сете попросил плату пшеницей, исходя из следующего расчёта: за первую клетку доски заплатить 1 зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна и т.д. – за каждую следующую клетку дать в два раза больше зёрен, чем за предыдущую. Конечно же, царь, не догадываясь о подвохе, согласился. Как вы думаете, сколько зёрен попросил Сете за изобретение шахмат? Итак: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024; 2048; 4096; 8192; 16384… А теперь укажем результат: 18 446 744 073 709 551 615. Огромность этого числа хорошо иллюстрируется следующим примером. Если всю эту пшеницу удалось бы поместить в амбар шириной 10 м и высотой 8 м, то его длина оказалась бы равной расстоянию от Земли до Солнца (150 000 000 км)! Понятно, что царь этим обстоятельством был не просто удивлён, но шокирован.

Идея невозможности исчерпать бесконечность. Можно ли указать наименьшее из всех положительных дробных (рациональных) чисел? Ответ: нет. Любое предполагаемое ближайшее число всегда можно поделить, например, на два. Именно поэтому древнегреческий математик Зенон говорил, что с точки зрения математики движение начать невозможно, так как мы никогда не сможем найти ближайшую точку, в которую нужно переместиться.

Идея недосягаемого предела. Представьте себе, что вы решили дойти до стола несколько необычным способом – всякий раз ступая ровно на половину того расстояния, которое осталось до стола. Дойдём ли мы до стола? Ответ: нет. Объяснение: с точки зрения математики, стол окажется для нас недосягаемым, так как любое число, не равное нулю, можно делить до бесконечности; при таком условии мы будем приближаться к нулю вечно, как к некоторому пределу, но никогда его не достигнем: 1; 1/2; 1/4; 1/8; 1/16; 1/32; 1/64; 1/128; … $\to$ 0;

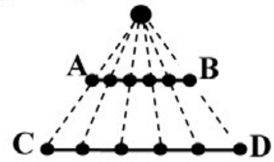
Идея актуального предела. Начнём увеличивать количество сторон правильного многоугольника… В какую фигуру превратится наш многоугольник? Ответ: круг. Объяснение: при бесконечном увеличении сторон и углов многоугольник превращается в круг. Конечно, мы не можем достичь бесконечного количества сторон, но мы вполне можем осуществить мысленный «скачок», в ходе которого правильный многоугольник «превратится» в круг.

Идея обхода математических запретов. Можно ли делить на ноль? Давайте попробуем единицу разделить на нуль. Но так как на нуль делить нельзя, то попробуем делить на числа, близкие к нулю: 1 : 0,1 = 10; 1 : 0,01 = 100; 1 : 0,001 = 1000; 1 : 0, 00001 = 10 000; 1 : 0,00001 = 100 000; 1 : 0,000001 = 1000 000. Таким образом, чем ближе делитель будет к нулю, тем больше будет частное. И в своём пределе мы получим бесконечно большое число. Следовательно, 1 : 0 = ∞. Нетрудно также догадаться, что вместо делимого можно подставить любое число.

Идея предельной трансформации одной фигуры в другую. Возьмём равнобедренный треугольник, будем постепенно увеличивать углы при основании до 90^0. Что будет происходить с площадью треугольника? Ответ: сначала площадь будет увеличиваться, а при углах, равных 90^0, станет равной нулю. Объяснение: если углы при основании равнобедренного треугольника будут стремиться к 90^0, то боковые стороны будут увеличиваться, а угол между боковыми сторонами будет стремиться к 0^0, далее стороны сомкнутся и превратятся в прямую, и тогда площадь будет равна нулю.

Идея ограниченности явлений мира рамками математики. Древнегреческий математик Зенон легко доказывал, что быстроногий Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху, потому что, когда он преодолеет разделяющее их расстояние, черепаха проползёт ещё немного, и так всякий раз до бесконечности. Есть ли в рассуждении Зенона ошибка? Объяснение: это математический парадокс, который не разрешим или разрешим с определёнными оговорками, связанными с идеями непрерывности, дискретности, предела, актуальной бесконечности. Приведём для сравнения пример традиционной задачи на преследование, где этот парадокс не учитывается. Собака погналась за лисицей, находящейся от неё на расстоянии 120 *м*. Через сколько времени собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 *м*, а собака – 350 *м*? Здесь проблем не возникает. Ответ: 4 минуты.

Идея рассмотрения конечных объектов в контексте бесконечности. Как мы знаем, в геометрии предполагается, что отрезок состоит из точек. Как вы думаете: где находится больше точек на отрезке AB или отрезке CD, который больше AB? Объяснение: с помощью рисунка видно, что множество точек малого отрезка AB эквивалентно множеству точек бóльшего отрезка CD, поэтому с точки зрения бесконечного множества точек эти два отрезка равны.



Идея «равенства» бесконечностей. Возьмём натуральные числа, возведём их в квадрат. Зададимся вопросом, каких чисел больше: натуральных или их квадратов? Ответ: это эквивалентные множества чисел. Объяснение: рассмотрим нижеприведённую таблицу; третья строчка лишь часть натурального ряда чисел – в ней отсутствуют 2, 3, 5, 6, 7, 8 и множество других натуральных чисел, но каждому числу третьей строчки соответствует одно, и только одно, число первой строчки, следовательно, целое (весь натуральный ряд в первой строчке) «равно» своей части (третья строчка), таким образом, в теории бесконечных множеств теряет силу утверждение «часть меньше целого».

1	2	3	4	5	6	…
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	…
1	4	9	16	25	36	…

Идея движения к пределу. Как вы думаете, к чему будет стремиться сумма чисел 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + … ? А сумма чисел 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +… ? Объяснение: оказывается, первый ряд чисел будет приближаться к единице (убывающая геометрическая прогрессия), а второй – к бесконечно большому числу. Казалось бы, складываются приблизительно равные числа и осуществляется одна и та же операция, но какая ощутимая разница в результате!

Идея предельного положения иррациональных чисел. В чём состоит тайна предельного положения иррациональных чисел? Для примера возьмём знаменитое число π. Его можно рассматривать с двух точек зрения: потенциальной и актуальной бесконечности. С точки зрения потенциальной бесконечности данное число приближённо исчисляется так: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415 ..... $\to \pi$. Тем самым мы с помощью бесконечной последовательности рациональных чисел вечно приближаемся к его точному иррациональному значению, к так называемой предельной точке, но никогда её не достигаем. С точки зрения актуальной бесконечности мы как бы уже знаем его точное значение и свободно оперируем им в формулах (например, $C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $V = 4/3\pi R^3$ и т.д.). Поэтому можно сказать, что данное число парадоксально соединяет в себе конечное и бесконечное, часть и целое, покой и движение: с каждым годом, усовершенствуя компьютеры, мы всё более и более приближаемся к его точному значению, однако это не мешает нам им оперировать и использовать в различных формулах.

В задачах на диалектику конечного и бесконечного мы обнаруживаем следующие особенности: попытки преодоления потенциальной бесконечности (или говорят «дурной бесконечности»), тягу производить с бесконечностями различные действия, стремление свести бесконечную последовательность чисел или ряд к некоему пределу, к сопоставлению и сравнению бесконечностей и т.п.

Суть метода сопряжения конечного и бесконечного заключается в следующих шагах: 1) выявить конечный объект в контексте бесконечности; 2) установить соответствие конечного и бесконечного; 3) если это возможно, то выявить условия и предельный переход, при котором конечное переходит в бесконечное; 4) обнаружить возможную закономерность, которая объединяет конечное и бесконечное.

Итак, эвристические методы в математике – это не просто нечто занимательное и увлекательное «для гимнастики ума», не только эффективное средство по прохождению бесконечных математических лабиринтов, так сказать, в рамках – математика ради математики, но, в первую очередь, некий духовный инструментарий по освоению и развитию внутреннего мира человека, построению его индивидуальной математической картины мира. ❑

Литература

1. *Балк М.Б., Балк Г.Д.* Математика после уроков. – М., 1971.
2. *Гурова Л.Л.* Психологический анализ решения задач. – М., 1976.
3. *Клепиков В.Н.* Формирование математической картины мира в современном школьном образовании // Педагогика. – 2017. – № 3. – С. 49–56.
4. Новые ценности образования: ТРИЗ-педагогика. – М., 1996.
5. *Пойя Д.* Математическое открытие. – М., 1976.
6. *Пухначёв Ю.В., Попов Ю.П.* Математика без формул. – М., 2007.
7. *Фридман Л.М.* Теоретические основы методики обучения математике. – М., 1998.
8. *Фридман Л.М.* Как научиться решать задачи. – М., 1979.
9. *Шуба М.Ю.* Учим творчески мыслить на уроках математики. – М., 2012.
10. *Шуба М.Ю.* Занимательные задания в обучении математике. – М., 1994.