Тема школьной конференции: «Парадоксы[1] бесконечности»

В.Н. Клепиков

Рассмотрение бесконечного имеет свои трудности, так как много невозможного следует и за отрицанием его существования и за признанием.

Аристотель

Познать мир до конца — это было бы чудом сосчитанной бесконечности.

Неизвестный

Введение

На уроках математики и в жизни мы достаточно часто сталкиваемся с понятием «бесконечность», но никогда не пытаемся понять, что это такое. В школьных учебниках математики не объясняется понятие бесконечности, но это одно из тех понятий, которые так или иначе пронизывают всю современную математику и современную науку. Данная конференция как раз и посвящена тому, чтобы осмыслить понятие «бесконечность» и найти парадоксы, которые неизбежно возникают при введении этого понятия.

Проблемы: можно ли совместить конечное и бесконечное? Какие парадоксы влечёт за собой признание понятия бесконечности в математике? Какое значение понятие бесконечности имеет в жизни человека?

Цель: постичь некоторые мыслительные и визуальные парадоксы, которые возникают при осмыслении понятия «бесконечность». Осмыслить понятие «бесконечность» в контексте духовного мира человека.

[1] Парадокс — неожиданное, непривычное, расходящееся с традицией утверждение, рассуждение или вывод.

Идея: осознать то, что, осваивая различные типы математической бесконечности, человек параллельно осваивал и звёздные просторы Вселенной, и окружающий мир, и глубины своего внутреннего мира.

Основные понятия: космос — хаос, конечное — бесконечное, целое — часть, гармония — дисгармония, предел — беспредельное, рациональное — иррациональное.

Представление бесконечности с помощью чисел

Представление о бесконечности у нас возникает, наверное, в первый раз тогда, когда мы ночью смотрим в бездонный ночной небосвод, где находится бесконечное количество звёзд и где открываются бесконечные просторы пространства и времени.

Само слово «бесконечность» говорит о том, что это нечто, не имеющее ни начала, ни конца. Хотя в математике существуют множества чисел, которые имеют наименьшее число, но не имеют наибольшего. Например, это натуральные числа:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16 ...

Бесконечности невозможно дать определение, но можно задать образы с помощью множеств чисел:

... –7; –6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5, 6; 7 ...

А также с помощью рационального (1/3 = 0,3333333.......) или иррационального ($\sqrt{2}$ = 1,4142135.......) чисел.

Интересно отметить, что, например, в системе счисления Древней Греции долгое время самым большим числом, которое имело название, была «мириада» — 10 000. Ещё в III в. до н.э. греки не знали, что множество натуральных чисел бесконечно. Хотя Фалес догадывался, что они не имеют наибольшего значения, а Евклид доказывает теорему об отсутствии верхнего предела последовательности простых чисел. Но это были единичные прозрения. Когда же греки бесконечность осознали, то они были в большом недоумении, так как разумом они понимали, что она должна существовать, но представить её не могли. Ведь представление всегда связано с наглядностью, осязаемостью, обозримостью. Действительно, попробуйте представить, например, весь ряд целых чисел.

Более того, древние греки очень любили во всём порядок. Они даже мироздание представляли себе в виде уютного жилища, а под небом понимали громадный звёздный шатёр. Недаром Вселенная для них была космосом, т.е. упорядоченным, совершенным и обустроенным домом или местом. А бесконечность у них ассоциировалась с беспорядком, безграничным хаосом, дисгармонией. Греческий мыслитель Зенон доказывал, что бесконечность нельзя помыслить без противоречий. Да так убедительно, что до сих пор математики «ломают головы» над его апориями, о которых мы расскажем чуть позже. Бесконечность так раздражала древних греков, что во времена Перикла за учение о бесконечности даже могли подвергнуть смертной казни.

А те, кто всё же решался думать о бесконечности, используя просторы Вселенной, рассуждали примерно следующим образом: «Окажись я на краю Вселенной, т.е. на сфере неподвижных звёзд, мог бы я вытянуть вовне руку или палку или нет? Допущение, что не мог бы вытянуть, нелепо. Но если вытяну, то то, что вовне, окажется либо телом, либо местом. Таким образом, сколько раз не допускай всё новую и новую границу Вселенной, отодвигая её всё дальше и дальше, всякий раз он будет аналогичным образом подходить к ней и задавать тот же самый вопрос, и если то, на что вытянута палка, всякий раз будет иным, то ясно, что оно и бесконечно»[2].

Хотя для первого знакомства с бесконечным нет нужды мысленно уноситься в космические дали, мы найдём бесконечное здесь, рядом, в обычной земной обстановке. Выберем недалеко от себя какой-нибудь предмет, например стол. Представьте себе, что вы решили дойти до него несколько необычным способом — всякий раз ступая ровно на половину того расстояния, которое осталось до стола. Нетрудно сообразить, что стол окажется для нас недосягаемым. Мы будем двигаться, не останавливаясь, сколько угодно лет, приблизимся к столу как угодно близко, но до самого стола так никогда и не дойти — ведь нас от него будет отделять вторая половина оставшегося расстояния. Абсурд? Глупость? По сути, мы здесь воспроизвели апорию Зенона. Поэтому Зенон и отверг бесконечность, ведь она совершенно не согласуется со здравым смыслом и приводит к очевидной нелепости!

Поясним ещё раз этот пример, но только на числах. Возьмём промежуток [0; 1]. Чтобы преодолеть расстояние от 0 до 1, необходимо сначала преодолеть половину пути (1/2), потом половину половины (1/4), затем половину четверти (1/8) и т.д. Оказывается, что при таком условии мы будем вечно приближаться к единице, как к некоторому пределу, но никогда его не достигнем! В этом случае мы получаем следующий ряд[3] чисел:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + 1/512 + 1/1024 + 1/2048 + \ldots \to 1$$

Итак, бесконечности невозможно дать определение, её нельзя увидеть всю, но можно отчасти представить, например, с помощью образа множества целых чисел. При этом, если мы имеем дело с бесконечностью, мы никогда не сможем выявить самое большое или самое маленькое целое число.

Апории Зенона

Одним из первых обнаружил проблемы, связанные бесконечностью, древнегреческий мыслитель Зенон. Апории Зенона сыграли важную роль в развитии античной математики и философии.

Первая из апорий[4] — «Дихотомия» (что в переводе с греческого означает «деление пополам») — доказывает невозможность мыслить

---

[2] Архит. Фрагменты древнегреческих философов. М., 1989. С. 455.

[3] Рядом в математике называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, составленное из чисел a_1, a_2, a_3 …, которые называются членами ряда. Ряд есть «бесконечная» сумма.

[4] Апория — трудная или неразрешимая проблема, связанная с возникновением противоречия, с наличием аргумента против очевидного, общепринятого.

движение без противоречий. Зенон рассуждает так: чтобы пройти какое бы то ни было, пусть самое малое расстояние, надо сначала пройти его половину и т.д. без конца, поскольку любой отрезок можно делить до бесконечности. И в самом деле, если непрерывная величина (в данном случае — отрезок) мыслится как бесконечное множество точек, то «пройти», «просчитать» все эти точки ни в какой конечный отрезок времени невозможно.

Если выразиться образно и кратко, то апории Зенона можно дать следующую интерпретацию: человек, если захочет, не только не сможет преодолеть бесконечную прямую и полупрямую, что естественно, но, самое удивительное, и любой самый маленький отрезок, так как он тоже состоит из бесконечного множества актуально данных точек. Другими словами, он, покинув один конец отрезка, как бы погрузится в неисчерпаемую бесконечность, не успев «зацепиться» за другой конец отрезка.

На том же допущении актуально данной бесконечности элементов непрерывной величины основана и другая апория Зенона — «Ахиллес и черепаха». Зенон доказывает, что быстроногий Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху, потому что, когда он преодолеет разделяющее их расстояние, черепаха проползёт ещё немного, и так всякий раз до бесконечности.

Забегая чуть-чуть вперёд, скажем, что некоторые математики пытались преодолеть апории Зенона с помощью понятия предела[5]. Не давая строгого определения понятия предела, ограничимся «популярным»: предел — это такое число, к которому искомая последовательность стремится сколь угодно близко. Например, сумма последовательности 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + … стремится к пределу, равному 1. В нашем случае пределом является черепаха. А так как сумма бесконечного ряда расстояний от античного героя до черепахи оказывается конечной величиной, то Ахиллес покрывает это множество отрезков и, таким образом, догоняет черепаху. Другими словами, Ахиллес не только «плывёт» от одной точки к другой, а шагает «пределами» («единым махом»), и преодолевает не только «бесконечности», но и конечные отрезки. При этом очевидно, что его шаги больше, чем у черепахи[6].

В приведённом выше объяснении как бы подразумевается, что пошаговые расстояния преодолеваются мгновенно, а не постепенно от одной точки к другой. Поэтому данное объяснение, как и все остальные, которые были даны за тысячелетия существований апорий, так или иначе грешат неточностями, натяжками и не разрешают апорий Зенона.

Источник трудностей в разрешении апорий заключается и в том, что наши понятия, в том числе и математические, отражают свойства реаль-

[5] Смотрите, например, книгу А.К. Кудрина «Логика и истина». М.: Политиздат, 1980. С. 52.

[6] Как пишет американский философ У. Джемс, «… необходимо рассматривать процесс реальной перемены уже не как нечто непрерывное, но как осуществляющееся через посредство конечных, а не бесконечно малых ступеней, — подобно тому как капли воды одна за другой наполняют бочку, падая в неё целиком или не падая вообще». Понятие предела, по мысли У. Джемса, является своеобразным мостом между бесконечным и конечным.

ной действительности огрублённо. Разве, например, существуют в самой действительности «точка», «отрезок» или «прямая»? Конечно, нет. Эти понятия являются результатом идеализации тех или иных свойств действительности. В апориях Зенона, с одной стороны, берутся идеализированные объекты, а с другой — реальные живые существа, т.е. одновременно и математические, и физические объекты. Поэтому можно сказать, что реальное и математическое движения в данном случае находятся в разных мирах.

Парадоксы Зенона нередко рассматриваются как софизмы[7], сбивающие людей с толку и ведущие к скептицизму. Характерно одно из опровержений Зенона философом Антисфеном. Выслушав аргументы Зенона, Антисфен встал и начал ходить, полагая, что доказательство действием сильнее всякого словесного возражения. Действительно, как покажет и дальнейший пример из искусства, живое движение всё-таки «преодолевает бесконечность».

В предыдущей попытке некоторых математиков разрешить апорию Зенона, несмотря на неудачу, всё-таки есть эвристическая идея: преодолеть множественность можно исходя из целого. Любое произведение искусства, являя собою целое, которое вполне обозримо, так как имеет форму, в то же время содержит «бесконечное» количество различных деталей. И в этой связи интересное подтверждение об особом умении художниками мгновенно «охватывать бесконечность» можно найти в древнегреческой скульптуре. Как отмечает А.В. Волошинов: «В самом методе построения пропорций Поликлета есть принципиальное отличие от метода пропорционирования египтян. Египтяне исходили из какой-то условной единицы измерения, например длины среднего пальца, которую затем целое число раз укладывали в ту или иную часть изображения человека. Поликлет же рост человека принимает за единицу, затем фиксирует определённую часть тела, какова бы она ни была по размерам, и находит их отношение»[8]. Благодаря данному методу «от целого к части» у великого скульптора по сравнению с египетскими статуями фигуры выходили пластичными и живыми. Подобную замечательную человеческую способность «преодоления бесконечности» с помощью интуитивного охвата целого можно найти в различных сферах жизни[9].

Итак, с помощью апорий Зенон показал, что множественность (чисел, точек и т.д.) и движение не могут быть мыслимы без противоречия, и потому они не есть что-то устойчивое, фундаментальное, бытийное. И это действительно так: движение, как и сама жизнь, есть противоречивое единство динамики и покоя, стремления и достижения, становящегося и ставшего.

---

[7] Софистика — рассуждение, основанное на преднамеренном нарушении законов логики.

[8] *Волошинов А.В.* Математика и искусство. М.: Просвещение, 2000. С. 271.

[9] Ребёнок, начиная читать, встречается с «бесконечными» сочетаниями букв. И осваивает чтение он только тогда, когда при произнесении отдельных букв и слогов как бы забывает о частностях и мгновенно воспроизводит слова и фразы как нечто уже готовое, в контексте целого языка. Можно сказать, что в процессе свободного чтения он также мгновенно «преодолевает неисчерпаемую бесконечность», т.е. бескрайнюю череду букв, слогов.

Геометрическое представление бесконечности

Многие математики стремились представить себе бесконечность наглядно, геометрически. Например, с помощью бесконечной прямой, бесконечной плоскости, бесконечного пространства.

Но некоторым математикам было важно получить бесконечные геометрические фигуры с помощью трансформации конечных фигур, как бы доказывая, что бесконечность не есть нечто потустороннее. Например, итальянский математик эпохи Возрождения Николай Кузанский (1401–1464) создал следующие образы бесконечности[10].

1. Возьмём самый обыкновенный равнобедренный треугольник. Закрепив его основание, будем удалять его вершину в бесконечность.

По мере стремления вершины треугольника к бесконечно удалённой точке угол у вершины треугольника будет становиться всё меньше и меньше, и в конце концов две боковые стороны треугольника, образующие угол при вершине, сомкнутся или сольются в одну. И мы в итоге получим бесконечную прямую. Отсюда можно дать несколько парадоксальное определение прямой. Прямая — это равнобедренный треугольник с бесконечными боковыми сторонами (рис. 1).

Рис. 1. Треугольник-прямая

Рис. 2. Окружность-прямая

2. Возьмём окружность, которая имеет определённую длину и радиус. Начнём увеличивать радиус окружности. По мере увеличения радиуса окружность будет всё более и более «разгибаться». И когда радиус станет бесконечно большим, окружность превратится в прямую линию. Отсюда можно дать следующее определение прямой: прямая есть окружность бесконечно большого радиуса (рис. 2).

На предложенном рисунке, чтобы чертёж вместился, вид дан сбоку. Отсюда окружности выглядят эллипсами. Как видно, при возрастании радиуса дуга окружности АВ сливается с прямой АВ, а при $r \to \infty$ окружность становится прямой.

Таким же образом Николай Кузанский доказывает, что прямая, треугольник, окружность, сфера в бесконечности совпадают. Другими словами, бесконечность как бы «поглощает» все геометрические фигуры, т.е. перед бесконечностью «все фигуры равны». Подобного рода чертежи нагляднейшим образом иллюстрируют две основные тенденции эпохи Возрождения: стараться всё представить геометрически и стремиться сопоставить с бесконечностью. Важно сказать, что именно идеи Николая Кузанского в области математики и космологии подготовили уче-

[10] Кузанский Н. Собр. соч. в 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1978. С. 66.

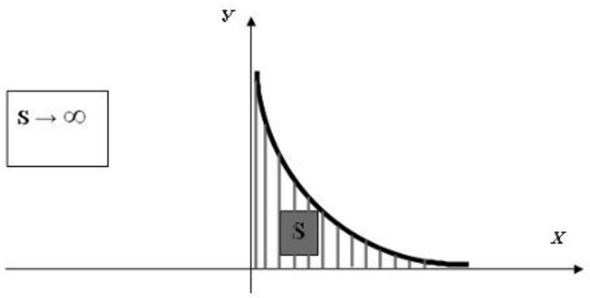

Рис. 3. Под гиперболой

ние Джордано Бруно о бесконечной Вселенной[11].

Приведём ещё один наглядный пример. Нарисуем одну из ветвей гиперболы. Данная ветвь обоими концами «вечно приближается» к координатным осям, но никогда их не пересечёт. Как вы думаете, чему будет равна площадь фигуры, которая находится между осями координат и графиком (заштрихованная красными линиями)? Площадь будет стремиться к бесконечности (рис. 3).

Воспользуемся ещё одним графиком функции $y = 1/x^2$ для пояснения мысли о том, что данную идею архитекторы использовали при построении готических храмов. Готический храм всегда устремлён в бесконечность, к небесам, к Богу.

Геометрическим символом готического собора можно считать или равнобедренный треугольник, боковые стороны которого устремляются в бесконечность, или график функции $y = 1/x^2$, ветви которого также устремлены ввысь, в бесконечность (рис. 4).

Особенно страсть к наглядности проявилась в эпоху Возрождения. Художники Ренессанса очень любили создавать с помощью линейной пер-

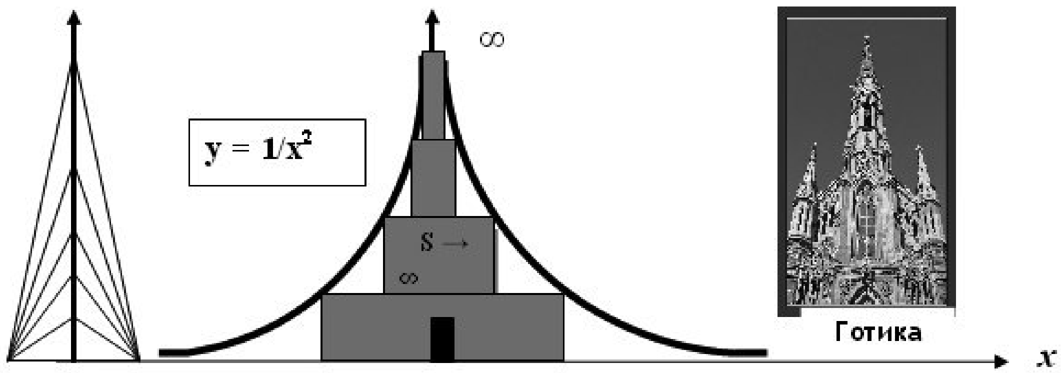

Рис. 4. Готический храм

[11] Если Вселенная бесконечна, то это значит, что у неё нет ни центра, ни окружности, так как центр и окружность — границы, а бесконечность не может иметь никаких границ. «Я полагаю, что Вселенная бесконечна, — писал Бруно. — Я утверждаю, что существует бессчётное число миров, подобных Земли. Я полагаю, что Земля есть светило и что ей подобны Луна и другие светила, число которых бесконечно, и что все эти небесные тела образуют бесконечность миров. Они составляют бесконечное целое в бесконечном пространстве, бесконечную Вселенную, т.е. Вселенную, заключающую в себе бесконечное множество миров» (Зигель Ф.Ю. Неисчерпаемость бесконечности. М.: Детская литература, 1984. С. 82).

спективы в своих картинах образы бесконечности (природные и небесные дали, просторы, горы и т.д.)[12]. Например, в картинах Леонардо да Винчи, Рафаэля, Брейгеля. Кстати, Леонардо очень внимательно изучал труды Николая Кузанского и вдохновлялся его геометрическими идеями. В произведениях многих художников природные образы бесконечности перекликаются с душевным настроением героев картины. В их картинах постоянно ощущается своеобразная «жажда» природной и душевной бесконечности. Недаром многие учёные считают, что именно эпоха Возрождения открыла уникальную и безграничную личность человека.

Если мы посмотрим на картины эпохи Возрождения, то на них видно, как с помощью линейной перспективы художники, которые все были и хорошими математиками, соотносили духовный мир человека и бесконечные пейзажные дали. Они как бы говорили: человек может направить свою энергию на освоение внешних бесконечных просторов, но может погрузиться в личностные глубины, и везде его ждут удивительные открытия и приключения. Вопрос состоит только в том, сможет ли он почувствовать, открыть в себе эту бесконечность?

Итак, создавая геометрические образы бесконечности, художники и мыслители пытались её наглядно увидеть, почувствовать. Изображённые дали и просторы на картинах художников намекали, что и человеческая душа тоже парадоксальна и имеет свой «ландшафт». Но самое главное, эти образы помогали им приблизиться к божественному, которое тоже у них ассоциировалось с бесконечностью.

Конечное и бесконечное

Как вы думаете, можно бесконечность составить из миллиардов, триллионов[13], квадриллионов, квинтиллионов, секстиллионов? Оказывается, что бесконечность не есть число, не есть сумма даже очень громадных чисел. Бесконечность — это новое качественное образование по сравнению с числом. Можно даже сказать, что это иная реальность.

Как вы думаете, можно ли бесконечность, как некое целое, разбить на части? Например, сколько будет $\infty : 1000 = ?$ Оказывается, на какое бы число мы ни делили бесконечность, в результате будет бесконечность. Более того: $1000 + \infty = \infty$; $\infty - 1000 = \infty$; $1000 \cdot \infty = \infty$.

А может ли в конечном содержаться бесконечное? Оказывается, может, если мы начнём делить данный и каждый из получившихся отрезков, например, пополам. Получается парадоксальная вещь: конечное содержит бесконечное.

Другими словами, между концами отрезка залегает целая бездна других точек. Наше удивление перед этой открывшейся бездной бесконечности объясняется тем, что подсознательно мы представляем себе

[12] Вот что пишет о линейной перспективе А.Ф. Лосев: «Эта точка схождения в качестве образа бесконечно удалённой точки слияния всех линий, ведущих в глубину, есть как бы конкретный символ самой бесконечности» (Лосев А.Ф. Эстетика Возрождения». М., 1978. С. 270).

[13] 1 триллион = 1000 миллиардов, 1 квадриллион = 1000 триллионов, 1 квинтиллион = 1000 квадриллионов, 1 секстиллион = 1000 квинтиллионов.

прямую как совокупность отдельных точек. Кое-кто даже подумает, что если взглянуть на прямую в какой-нибудь сверхмикроскоп, то в поле зрения она распадётся на отдельные точки. Для невооружённого же глаза эти точки сливаются в сплошную линию. Однако это заблуждение! Прямая (и вообще любая линия) есть непрерывная череда точек или «след» движущейся точки, и в слове «непрерывный» заключена вся суть дела.

Чтобы понять, что такое непрерывность, давайте рассмотрим расстояние между двумя точками, например, между 1 и 2. Оказывается, чтобы перейти от единицы к двойке, требуется преодолеть целую бесконечность. Более того, чтобы преодолеть эту бесконечность точек, необходимо это делать, как бы «перетекая» от одной точки к другой. Поэтому возникает проблема перехода от одной точки к другой, от одного числа к другому, и этот переход немыслим без явления непрерывности. Другими словами, преодолеть бесконечную бездну между двумя точками можно лишь тогда, когда между ними будут отсутствовать «разрывы». И здесь мы получаем опять парадоксальную ситуацию: прямая состоит из точек и одновременно есть нечто цельное, единое.

Таким образом, бесконечно большая величина вовсе не обязана быть невообразимо большой, она может иметь любые конечные размеры. С точки зрения математики, актуально бесконечно большим может считаться и отрезок длиной в один сантиметр, миллиметр и т.д., и вообще любой, сколь угодно малый, конечный отрезок.

Итак, мы доказали, что любой отрезок содержит в себе бесконечное количество точек, а также, что любой числовой промежуток включает бесконечное количество чисел. Получается удивительная вещь: бесконечность состоит из частей, которые в свою очередь содержат бесконечности. Недаром древние греки считали, что «всё находится во всём».

Актуальная и потенциальная бесконечность

Как вы думаете, к чему будет стремиться сумма чисел 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = ? А сумма чисел 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +...= ? Оказывается, первый ряд чисел будет приближаться к единице, а второй — к бесконечно большому числу. Но не будем торопиться...

Оказывается, существуют два типа математической бесконечности. Их различие обусловлено изначальной установкой: можно ли «охватить» бесконечность или нельзя. Давайте рассмотрим предложенные суммы двух бесконечностей.

Те, кто знаком с суммированием членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $q < 1$, отметят, что выражение 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... потенциально стремится к 1 или актуально равно 1. При вычислении суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии предполагается, несмотря на то, что этот ряд вечно приближается к 1, что все её члены (а их бесконечно много) уже даны. В таком случае математики говорят об актуальной, существующей, «завершённой» бесконечности, которая в нашем случае равна 1, т.е. 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 1. Получается удивительная вещь: бесконечность мы задаём с помощью одного какого-либо конечного числа. Но это не обычное число: оно есть вечное приближение к 1, т.е. единство покоя и движения, стремления и достижения. Поэтому в случае актуальной бесконечности «объять необъятное» возможно.

Интересно, что некоторые мыслители актуальную бесконечность связывали с единицей, как с бесконечным единством или целым. Галилео Галилей писал: «Если какое-либо число должно являться бесконечностью, то этим числом должна быть единица: в самом деле, в ней мы находим условия и необходимые признаки, которым должно удовлетворить бесконечно большое число, поскольку оно содержит в себе столько же квадратов, сколько кубов и чисел вообще… Отсюда заключаем, что нет другого бесконечного числа, кроме единицы»[14].

Если мы будем постепенно суммировать данную сумму, подсчитывая суммы одного, двух, трёх и т.д. членов (частичные суммы), то получим следующую последовательность[15] чисел: 0,5; 0,75; 0,875; 0,9375; 0,96875… $\rightarrow$ 1. Этот ряд будет стремиться к 1. Единицу в данном случае называют пределом[16]. Предел — важнейшее понятие математики. Считают, что число *а* есть предел переменной величины *x,* если в процессе своего изменения *x* неограниченно приближается к а.

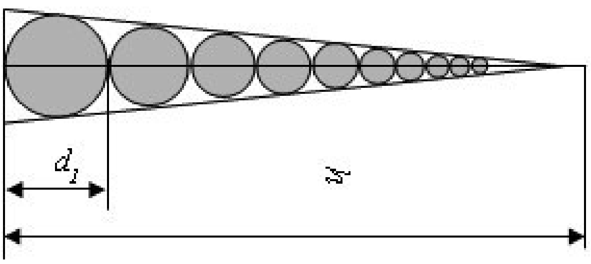

Рис. 5. Вписывание окружностей

Рассмотрим рис. 5. Последовательность длин диаметров даёт пример переменной величины d_n, которая в процессе своего изменения, т.е. с возрастанием номера n, неограниченно приближается к нулю: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \ldots \rightarrow 0$. Поэтому предел этой последовательности равен нулю.

С рассмотренной последовательностью свяжем другую переменную величину yn — последовательность сумм их диаметров: $d_1 + d_2 = y_1$; $d_1 + d_2 + d_3 = y_2$; $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = y_3$;… Будет ли эта переменная стремиться к какому-нибудь пределу? Оказывается, предел последовательности $y_n = h$ (длине высоты равнобедренного треугольника).

Хорошим наглядным образом актуальной бесконечности является правильный многоугольник, у которого количество сторон стремится к бесконечности ($n \rightarrow \infty$), и поэтому в пределе он сливается с окружностью (рис. 6). Момент превращения многоугольника в окружность называют «предельным переходом». Таким образом, данная фигура синтезирует в себе конечное (длина окружности или периметр многоугольника) и беско-

[14] *Галилей Г.* Избранные труды. В 2 т. М., 1964. Т. 1. С. 205.

[15] Последовательность записывается $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, или кратко (x_n). Элементы $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ называются членами последовательности.

[16] Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

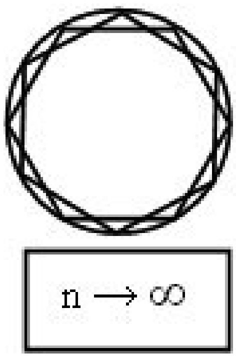

Рис. 6. Вписывание правильных многоугольников

нечное (число сторон). Отсюда можно дать определение окружности. Окружность — это правильный многоугольник, количество сторон которого стремится к бесконечности[17].

К прекрасному воображаемому образу актуальной бесконечности можно отнести и движение точки с бесконечной скоростью. Как это ни парадоксально, но, двигаясь с данной скоростью, точка уже будет покоиться. Так Николай Кузанский доказывал возможность тождества движения и покоя. Важно добавить, что на основе данного отождествления Галилео Галилей подошёл вплотную к установлению закона инерции.

При рассмотрении суммы чисел 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +... может показаться, что она тоже не превысит какого-либо заданного числа. На самом деле написанное выражение бесконечно велико: если взять в нём достаточно большое количество членов, то сумма их превысит любое число (поэтому данный ряд является расходящимся). Например, $S_{1000} \approx 6{,}48$; $S_{1000000} \approx 13{,}39$. В этом случае говорят о потенциальной бесконечности, т.е. бесконечности, которая существует только потенциально, как нечто скрытое, пока ещё (и вечно!) недостигнутое и реально незавершимое.

Бесконечное в потенции — это пространство, поскольку оно делимо до бесконечности. Потенциально бесконечно время, ибо оно не может существовать иначе, как постоянно возрастая. Бесконечное в потенции — это множество чисел, для любого из которых можно найти какое угодно большее число.

В математике, как вы знаете, самым знаменитым иррациональным числом является число π ($c/d = \pi = 3{,}1415926\ldots$). Что нужно для того, чтобы абсолютно точно записать число π? Для этого нужен бесконечно большой лист бумаги и бесконечно большое время, ибо сколь мелко и быстро мы бы ни писали цифры, заполнять ими бесконечно большую поверхность придётся бесконечно долго. В этом случае мы также имеем дело с потенциальной бесконечностью. Однако когда мы используем число π в формулах ($C = 2\pi R$, $S = \pi R2$ и т.д.), то мы пренебрегаем постепенным приближением к точному значению π и сразу же, актуально его используем как если бы знали точное значение. В последнем случае мы рассматриваем число π как актуальную бесконечность.

Древние греки, отчасти признавая потенциальную бесконечность, категорически отвергали актуальную бесконечность. Это было связано с тем, что потенциальная бесконечность их особо «не беспокоила», так как для повседневных и практических математических вычислений она существенной роли не играла. Однако актуальная бесконечность, все элементы которой уже предполагаются в наличии, ставила мыслителей в тупик, как в случае с апориями Зенона. При этом идею актуальной бесконечности мыслители и ху-

[17] Интересно, что А.Ф. Лосев рассматривал актуальную бесконечность как скульптурный символ и считал, что она имеет идеально-фигурное строение (Лосев А.Ф. Хаос и структура. М., 1997. С. 366).

дожники в своих творениях так или иначе использовали.

Таким образом, бесконечности бывают актуальные и потенциальные. Как это ни удивительно, но актуальную бесконечность мы, несмотря на её бесконечный ряд, можем «уловить» или «схватить», даже выразить конечным числом. Потенциальная же бесконечность «убегает в безбрежные дали» и «просчитать» её элементы не представляется возможным.

«Когда часть равна целому»

Как вы думаете, может ли часть быть равна целому? Например, множество натуральных чисел «равно» множеству целых чисел? Здравый смысл говорит, что, конечно, не может, так как в множестве целых чисел находится больше элементов. Однако это не так.

Для убедительности (так это более наглядно) докажем, что множество натуральных чисел «равно» множеству квадратов натуральных чисел. Напишем натуральное множество чисел, а под ним квадраты тех же чисел:

1	2	3	4	5	6	…	Целое
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	…	???
1	4	9	16	25	36	…	Часть или целое?

Совершенно очевидно, что вторая строчка содержит столько же чисел, сколько и первая, — она состоит из тех же чисел натурального ряда, над которыми написан знак возведения в квадрат. Возведём числа в квадрат и запишем результат в третьей строчке. Количество чисел в этой строчке такое же, как в первой и второй. Однако третья строчка лишь часть натурального ряда чисел — в ней отсутствуют 2, 3, 4, 5, 6 и множество других натуральных чисел. Но каждому числу третьей строчки соответствует одно, и только одно, число первой строчки. Следовательно, целое (весь натуральный ряд в первой строчке) «равно» своей части (третья строчка).

Может быть, геометрический пример будет более убедительным. Как мы знаем, в геометрии предполагается, что любая фигура состоит из точек. Учитывая это, мы можем доказать, что множество точек малого отрезка АВ эквивалентно множеству точек большего отрезка СД. Поэтому с точки зрения бесконечности эти два отрезка «равны»[18] (рис. 7).

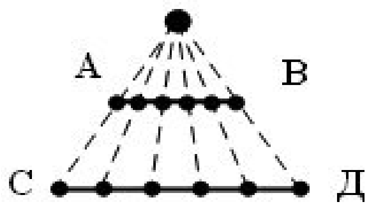

Рис. 7. Эквивалентность отрезков

Возьмём ещё одно наглядное доказательство. Нам нужно доказать, что множество точек отрезка АВ эквивалентно множеству точек полупрямой ВС. Делаем соответствующий чертёж (рис. 8). На чертеже видно, что точечное множество отрезка эквивалентно точечному мно-

[18] Примеры взяты из книги: *Пухначёв Ю.В., Попов Ю.П.* Математика без формул. М., 2007. С. 74.

жеству луча. И в этом случае часть «равна» целому.

Ещё один пример. Как вы думаете, где содержится больше точек: в дуге окружности или на прямой? Посмотрите на чертёж (рис. 9) и убедитесь, что множество точек дуги (которую можно принять за отрезок) эквивалентно множеству точек прямой. И в этом случае часть «равна» целому.

А как вы думаете, где содержится точек больше: в стороне (отрезке) квадрата или в самом квадрате? Оказывается, что в стороне содержится столько же точек, сколько и в квадрате, и даже в кубе. Более того, в стороне содержится столько точек, сколько и во всём бесконечном пространстве. Это связано с тем, что бесконечность не может быть меньше бесконечности.

В жизни математика Кантора это был драматический момент, когда он попытался доказать, что в квадрате точек больше, чем в отрезке. После трёх лет мучений вопрос был решён в пользу их «равенства». «Я вижу это, но не верю», — писал он своему другу.

Итак, в математике существует парадоксальная ситуация, когда часть равна целому. Более того, оказывается, что в стороне квадрата, т.е. в отрезке, содержится столько же точек, сколько в квадрате, в кубе и даже во всём бесконечном пространстве.

Бесконечность и внутренний мир человека

Конечно, изучение математической бесконечности само по себе было очень важно, но более всего мыслителей волновал вопрос о её значении для внутреннего мира человека. Реальным и зримым воплощением бесконечности был, конечно,

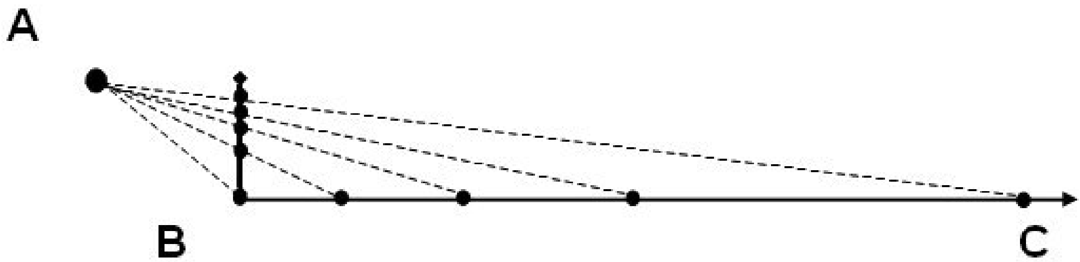

Рис. 8. Эквивалентность отрезка и луча

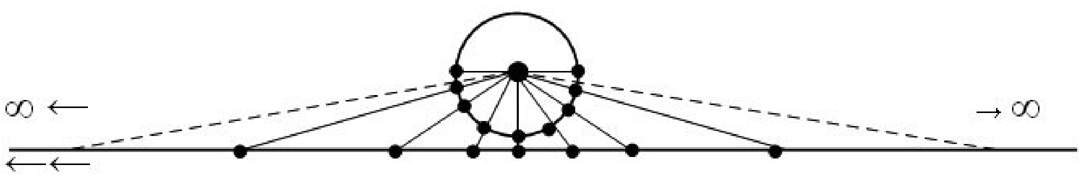

Рис. 9. Эквивалентность дуги и прямой

Космос. Поэтому учёные, обращаясь к вселенским просторам, постепенно переходили к человеку, находя в космической гармонии и бесконечности созвучие его душевному миру.

Некоторые мыслители бесконечность связывают с таким важным качеством духовного мира человека, как мышление. Действительно, с какой скоростью мыслит человек и как мыслит человек? Древнегреческий математик и философ Фалес считал:

«Больше всего — пространство, ибо оно объемлет всё;

Мудрее всего — время, ибо оно раскрывает всё;

Быстрее всего — мысль, ибо она обгоняет всё».

Спустя 2000 лет Блез Паскаль напишет:

«В отношении пространства вселенная обнимает и поглощает меня, как точку, мыслью же своей я обнимаю её». И уточнял, используя для пояснения своей мысли образ движущейся точки: «Тогда я хочу продемонстрировать вещь бесконечную и в то же время неделимую. Это точка, движущаяся в произвольном направлении с бесконечной скоростью. Она должна целиком пребывать и во всём пространстве вообще, и в каждом отдельном его месте. Пусть же этот естественный образ, казавшийся Вам прежде невозможным, заставит Вас убедиться также и в существовании иных явлений подобного рода. И не стоит заключать из полученного таким образом урока, будто он не оставляет никакой возможности для познания. Напротив, он даёт бесконечный простор познанию»[19].

Приведём для примера и размышления о личности русского философа XX века Николая Бердяева:

- «Личность есть микрокосм, целый универсум. Личность не может быть частью в отношении к какому-нибудь целому, космическому или социальному, она обладает самоценностью... Личность есть единство во множестве, охватывающее универсум. Поэтому существование личности есть парадокс... Личность есть живое противоречие между личным и социальным, между формой и содержанием, между свободой и судьбой, между конечным и бесконечным... Личность есть прежде всего антиномическое сочетание конечного и бесконечного. Личность потерялась бы, если бы в ней исчезли границы и сдерживающие формы, если бы она расплылась в космической бесконечности»[20].

В каком-то смысле Николай Бердяев «синтезирует» самое главное, что подспудно вызревало в исследовании:

- личность есть микрокосм (часть эквивалентна целому),
- личность парадоксальна (противоречивое сочетание конечного и бесконечного),
- личность есть единство во множестве (существование актуальной бесконечности),
- личность способна охватить универсум и одновременно имеет форму (тайна воспроизводства человеком актуальной бесконечности в жизни и творчестве).

Итак, почти одновременно человек осваивал математическую беско-

[19] *Паскаль Б.* Мысли. М.:, 1994. С. 78, 326.

[20] *Бердяев Н.* Философия свободного духа. М., 1994. С. 297, 303.

нечность, звёздные просторы вселенной и глубины своего внутреннего мира». Бесконечность присутствует не только во внешнем мире, но и во внутреннем мире человека. Неисчерпаемость внутреннего мира человека говорит о том, что он всегда сам для себя будет загадкой и тайной. В ином случае он был бы просто роботом с набором конечных качеств и свойств. Именно внутренняя глубина и парадоксальность не дают возможности человеку стать машиной.

Заключение

Какие же парадоксы, связанные с бесконечностью, были на данной конференции приоткрыты?

1. Если мы попробуем дойти до стола, то с точки зрения математики, всякий раз ступая ровно на половину того расстояния, которое до него осталось, мы стола не достигнем.

2. Бесконечность невозможно составить из даже очень больших, но конечных чисел, так как бесконечность не есть число, а есть новое качественное образование, иная реальность.

3. Если мы будем производить над бесконечностью арифметические действия, то в результате у нас получится та же бесконечность, так как одна бесконечность не может быть «бесконечнее» другой[21].

4. Любой конечный отрезок содержит бесконечное количество точек, и поэтому множества точек, например, отрезка и прямой эквивалентны.

5. Прямая состоит из точек и одновременно есть нечто непрерывноцельное, т.е. её можно рассматривать как нечто едино-раздельное.

6. Часть может быть «равна» целому. Например, множество натуральных чисел «равно» множеству чётных чисел.

7. Актуальная бесконечность синтезирует в себе беспредельное и предел, и поэтому её можно «объять». Особенно хорошо это видно на геометрических чертежах.

8. В своём бесконечном пределе геометрические фигуры тяготеют к одной фигуре — прямой или точке. Поэтому многие математики считают, что все фигуры «произрастают» из движущейся точки.

9. Существуют числа, которые получаются лишь в процессе вечного приближения к ним. Например, 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + 1/512 + 1/1024 + 1/2048 + … = 1, т.е. единица «вбирает» в себя покой и движение.

10. Движение точки с бесконечной скоростью равносильно покою. При этом движущаяся точка охватывает целую вселенную.

Несмотря на то, что человечество размышляет над проблемой бесконечности вот уже несколько тысячелетий, данное понятие остаётся загадочным и парадоксальным. Математики отчасти научились обращаться с бесконечностью, но когда учёные переходят к миру природы, то загадки возникают вновь и вновь. Например, бесконечна или конечна наша Вселенная? Можно ли дойти до самой маленькой частицы вещества?

[21] Хотя иногда математики сравнивают бесконечности с точки зрения их мощности. Смотрите популярное изложение этого вопроса в книге Зигеля Ф.Ю. Неисчерпаемость бесконечности. М., 1984. С. 18–23.

Можно ли подойти к истокам духовного мира человека?

Можно сказать, что освоение потенциальной бесконечности нацеливает человека на вечную устремлённость к *Истине, Идеалам, Ценностям.* Освоение актуальной бесконечности помогает осознать, что в силах человека охватить и понять окружающий мир, если и не в деталях, то в виде *Образа, Символа, Знака, Закона.* Потенциальная бесконечность внушает уверенность в возможности непрерывного движения вперёд и самосовершенствования, актуальная бесконечность говорит о том, что в человеке уже сейчас проявляется его итоговый результат в виде частных достижений. Поэтому считают, что потенциальная бесконечность задана, актуальная — дана.

Благодаря проведённому исследованию можно констатировать, что бесконечность никогда не покорится человеку, но это не так важно. Важно другое. Бесконечность постоянно «помогает» человеку в его повседневных делах и творчестве. В ней существует нечто очень человеческое, позволяющее перейти от «необъятного» к вполне «обозримому» и тем самым открыть законы мироздания и создать прекрасные произведения культуры. Ведь любое подлинное творение человека есть синтез предельного и беспредельного, и поэтому оно всегда есть нечто очень знакомое, родное и в то же время содержит в себе вечную загадку. А это значит, что если мы будем находиться в неустанном творческом поиске, то нам всегда будет очень интересно жить! И будем благодарны бесконечности — теперь нам более понятной и близкой.