

Значение понятий «целое», «доля», «часть» в математике и этике

В.Н. Клепиков

Предлагаем новое прочтение школьных тем «Нахождение дроби от числа» и «Нахождение числа по его дроби», которое позволяет найти новые содержательные и методические подходы в изучении данного материала.

Интегрированный урок (6 класс)

Эпиграфы

- «Есть в мире вещи, существующие, когда мы сохраняем их целостность. Да и сам мир есть гармония частей, составляющих целое».

- «Сохранение мира в единстве и целостности — это и есть та этика благоговения перед Жизнью, о которой писал и которую утверждал собственной жизнью один из величайших гуманистов XX века Альберт Швейцер».

Цель: Достигнуть понимания того, что между понятиями «целое», «доля» и «часть» существует глубинная взаимосвязь, которую можно найти как в математике, так и в этике.

Идея: Фундаментальные мыслительные образы имеют универсальное значение и благодаря этому формируют нашу духовную жизнь; к таким образам относится триада «целое — доля — часть».

Проблемы:

- Можно в математике и этике найти общие понятия и образы, которые бы решали примерно одни и те же духовно-нравственные задачи и были важны для развития человека?

- Почему так важно при взаимодействии с миром исходить из понятий «целое», «доля» и «часть»?

- Что такое «целое», «доля» и «часть»?

Основные понятия:

- мир — целое — доля — часть;
- связь — соответствие — равенство — пропорция — гармония;

- целое — единое — полное — самодостаточное — завершённое;

- доля — мера — отношение — дробь (как единство «части» и «целого»);

- часть — нечто зависимое — несамодостаточное — стремящееся к единству с другими частями.

Литература:

1. Биbihин В.В. Мир. Томск, 1995.

2. Гайдeнко П.П. История греческой философии в её связи с наукой. М., 2000.

3. Евклид. Начала. М., 1949. Кн. VII–X.

4. Клепиков В.Н. Математические притчи. Обнинск, 2005.

ПРАКТИКА ДЛЯ ПРАКТИКОВ

5. Кузанский Н. Собр. соч. В 2 т. М., 1978.
6. Платон. Собр. соч. В 4 т. М., 1990–1994.

7. Пришвин М. Избранные произведения. Из дневников. Тула, 1989.
8. Русская мифология. Энциклопедия. М., 2005.

Ход урока

1. Устный счёт

Как найти часть от целого? (можно и в процентах)	Как найти долю от целого?	Как найти целое, если известно, какую долю составляет часть?
15 минут от 1 часа: часть делим на целое,	$1/4$ от 1 часа: долю умножаем на целое, 15 минут	15 минут есть $1/4$ часа: часть делим на долю, 1 час или 60 минут

Вопросы.

1. Какие понятия нам нужны, чтобы решить эти задачи? («целое», «доля», «часть»)

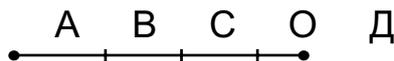
2. Что в данных примерах является «целым», «долей», «частью»? (15 минут — часть, $1/4$ — доля, 1 час — целое).

3. Какое понятие (число) вам представляется наиболее интересным и почему? (Может быть «доля», так как это единственное из данных чисел, которое «помнит» о других: «целом» и «части». Доля $1/4$ «помнит» о 15 и 60).

2. Задание.

Давайте попробуем «целую», «долю» и «часть» увидеть визуально.

Дан [АД]. Точки В, С и О делят [АД] на равные части (можно начертить с помощью циркуля и линейки). Какие доли составляют получившиеся отрезки друг от друга. Перечислить все возможные отношения.



Вопрос

1. Мы видим «часть» — [АВ], [АС] и т.д., «целое» — [АД], а также [АО], [ВО], [АС] и т.д. А можно увидеть «долю»? Как увидеть «долю»?

2. Достаточно ли посмотреть только на «часть» или/и «целое»?

Ответ. Долю можно схватить только в процессе движения от «части» к «целому», или наоборот, связывая и сравнивая, поэтому доля — это динамичное, «живое», пластичное отношение. Если искать какое-либо число, символизирующее живую мысль, то это, конечно, доля. Именно живая мысль постоянно сравнивает, сопоставляет, анализирует, т.е. устанавливает отношения.

Но понятия «доля», «целое», «часть» относятся не только к числам и отрезкам, их можно распространить на все предметы мира.

Великий древнегреческий мыслитель Платон по поводу взаимосвязи всех вещей мира говорил: «Однако два предмета (числа) сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы

между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое. И задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция...».

3. Занимательное задание.

Найди связующее понятие между двумя другими:

- скульптура и fuga (?)
- белое и чёрное (?)
- яйцо и зерно (?)
- север и запад (?)
- круг и шар (?)
- рука и гроздь (кисть)
- животное и нежность (ласка),
- добрый и злой (?)
- родник и отмычка (ключ)
- 2, 60, 40, 3, ($2/3 = 40/60$)

Вопрос. Просто ли устанавливать связи между различными предметами? (Многие учёные считают, что в способности устанавливать связи между предметами и явлениями мира и состоит культура мышления человека.)

А теперь поговорим о «прекраснейшей из связей» — о пропорции.

Вопросы

1. Как вы думаете, почему Платон заговорил о связи, о пропорции? (без связей невозможно было бы логичное мышление, воображение, «мир» распался бы на разрозненные части)

2. Что такое пропорция?

3. Как из чисел нашего примера составить пропорцию? Сколько пропорций можно составить?

4. Что для этого нужно знать? (свойства пропорции)

Древнегреческая культура

Вся древнегреческая культура построена на тонком и живом пони-

мании пропорциональных отношений. Древние греки сумели вдохнуть жизнь в сухую формулу $a/v = c/d$. Отсюда их гениальные творения, которым человечество удивляется уже тысячелетия.

4. Задание. Составьте пропорции.

- Составьте из чисел 15, 60, 1 и 4 все возможные пропорции (можно использовать и другие соответствующие числа):

$15/60 = 1/4$	$60/4 = 15/1$	$1/15 = 4/60$	$4/1 = 60/15$
---------------	---------------	---------------	---------------

Вопросы. Сколько пропорций можно составить? Как найти в этих отношениях долю?

Ответ. Здесь любая дробь может служить долей. Например, $15/60$ связывает 1 и 4, $60/4$ связывает 15 и 1 (свойство пластичности пропорции).

Понятие «доля» значимо не только в математике, но и в жизни, культуре.

Вопросы

1. А в нашей жизни мы употребляем слово «доля»?

Иногда бабушки говорят: «такая уж у него его судьба, доля».

2. Что значит, когда мы говорим о человеке, что у него «такая уж доля»?

Доля в славянской культуре

Понятие доли было очень важным в культурной традиции восточных славян. Первоначально оно соотносилось с индивидуальной человеческой судьбой. Согласно народным представлениям, каждый человек при рождении наделялся своей, определённой долей. Вместе с тем она осмыслялась не сама по себе, а соотносилась с понятием чего-то целого. В этом плане показательно, что само

слово «доля» связано с глаголом «делить», а человеческая судьба обозначалась также словами «удел», «участь», включающими понятие части целого. Этим целым в традиционном сознании представлялось всеобщее благо — количество и качество жизни: здоровье, удача, счастье, события, наполняющие жизнь.

В мифологических представлениях персонализированному образу Доли как хорошей судьбы нередко противостоят Недоля, как олицетворение неудачной, плохой жизни. Несмотря на то, что доля считалась неизменной, по некоторым поверьям хорошая доля может оставить человека, если он всё время грешит. По народным представлениям доля есть у каждого человека. Она даётся ему при рождении и сопровождает его в течение жизни. Русские пословицы гласят: «Всяку долю Бог посылает», «Наша доля — Божья воля», «Бойся, не бойся, а от доли своей не уйдёшь». Действительно, попытка уйти от своей доли считалась безнадёжной.

Согласно одним воззрениям, доля умирает вместе с человеком. Однако некоторые традиционные обряды и представления позволяют считать, что доля — не только прижизненный спутник человека, что она, подобно душе, остаётся после смерти, и ею же определяется посмертное существование человека.

В Древней Руси в Святки девушки гадали, «кликают долю». Для этого выходили поздно вечером к реке или на перекрёсток и кричали: «Доля, ау-у!» (Русская мифология. Энциклопедия. М., 2005. С. 398).

Вопросы

1. Помните, мы сказали, что «доля» связана с движением, динамикой,

жизнью? (в культурной традиции, как и в математике, этот смысл сохраняется)

2. На какую связь указывает «доля» в славянской мифологии? (связь между всеобщим благом, судьбой, Богом и реальными жизненными поступками, поведением людей)

3. Как сохранить свою хорошую долю? (не делать и не желать людям зла, не грешить)

5. *Задача.* А теперь давайте попробуем почувствовать момент необходимости введения понятия «целое».

• На каждого человека в течение урока приходится 6 м^3 воздуха. Сколько учеников можно поместить в кабинет с размерами 9 м, 7 м и 3 м?

1) $V = 9 \cdot 7 \cdot 3 = 189 \text{ (м}^3\text{)}$ — объём воздуха в классе.

2) $189 : 6 = 31,5$ (человека) — можно вместить в классе.

1. Ответ: 31,5 человека?

2. Ответ: 31 человека.

Вопросы.

1. Как вы относитесь к ответу 31,5 человека? Что вас здесь не устраивает? (значит, существуют такие явления, предметы, вещи, которые невозможно делить. Даже в математике, перед тем как записать, казалось бы, точный ответ, нужно подумать)

2. А какие явления и предметы вы знаете ещё, которые невозможно делить? (любовь, дружбу, цветок, живое существо и т.д.)

3. Можно быть совестливым наполовину, любить на треть, дружить на четверть?

6. *Задание.* Приобщение к целому иногда помогает при счёте.

Сравните два числа через «целое».

Вопрос. Как сравнить две дроби? (приведением к общему знаменателю, числителю, к целому)

Пример. Как сравнить $2/3$ и $3/4$ с помощью целого? Дополняем эти дроби до единицы, получаем $1/3$ и $1/4$, сравниваем их, $1/3 > 1/4$, то есть до единицы $2/3$ не хватает больше, чем $3/4$, поэтому получаем, что $2/3 < 3/4$.

Вопрос. Почему мы данные дроби дополняли до единицы? (символом «целого» в математике является единица).

Единица как целое

Символом «целого» в математике и других науках является единица. Но не та единица, которую мы используем при счёте. Древнегреческий математик Евклид в «Началах» так понимал единицу: «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым» (Евклид. Начала. М., 1949. Кн. VII-X. с. 9). Мыслитель эпохи Возрождения Николай Кузанский писал: «Число не есть единица, хотя всякое число свёрнуто в единице...» (Кузанский Н. Т. 2, с. 19, 295). Другими словами, единица для них не просто число, а нечто божественное, к чему всё приобщается. Поэтому следует различать качественную характеристику единицы и количественную: единица одновременно является цифрой, числом и «целым». Наведением на качественное свойство единицы может служить действие возведения любого числа в нулевую степень или возведение единицы в любую степень: в данном случае мы всегда получаем в результате единицу; а также нахождение для единицы обратного числа: обратным числом является та же единица.

А как обстоит дело с понятием «целое» в этике?

Притча «Целое»

В Древней Греции жили остроумные и хитрые мыслители — софисты. Один из них рассуждал следующим образом:

• «Лекарство, принимаемое больным, есть добро. Чем больше добра, тем лучше. Значит, лекарств нужно принимать как можно больше».

Вопрос. Какие ошибки здесь сразу же бросаются в глаза?

1. Лекарства, принимаемые больным, не всегда есть добро (необходимы нужные лекарства и в меру). Как соотносятся понятия «добро» и «мера»? Может ли быть добро в «меру», т.е. можно дозировать, измерять добрые поступки?

2. Нельзя сопоставлять лекарство и добро, так как если лекарства можно дозировать, то добро нельзя. Добро есть нечто целое.

Продолжение притчи в контексте математики

Одна из ошибок в этом рассуждении возникает из-за пренебрежения следующим фактом: добра не может быть больше или меньше, добро всегда есть полнота, оно есть целиком или его нет. Когда мы пренебрегаем целостным пониманием явления, то сразу же получаем смешные выводы. Подобные ошибки легко найти и в математике. Например, иногда по той же причине получаются следующие результаты: 1,5 человека, 2,4 машины, $3/4$ ручки и т.д. Поэтому в математике, как и во всех других науках, играет большую роль понятие «целое». «Целое» может быть любым числом. Однако самым важным является тот факт, что все измерения в

точных науках производятся относительно универсального эталона: 1 м, 1 час, 1 кв. м. и т.д., а эталон и есть «целое». В этой связи можно проникнуть и в глубокий смысл фразы Пифагора: «Всё есть число», если под числом понимать универсальную единицу или целое.

Понятие «целое» играет важную роль и при восприятии красоты мира.

М. Пришвин. Мысли.

1. «Разве я не понимаю незабудку: ведь я и весь мир чувствую иногда при встрече с незабудкой, а скажи — сколько в ней лепестков, не скажу. Неужели же вы меня пошлёте «изучать» незабудку?... И пусть нет звёздочек на небе, как «ангельских душишек», зато есть на земле незабудки».

2. «Только злой, дурной человек не имеет в жизни минуты для расширения души, обнимающей Целое».

3. «Мои выводы — образы, и самый большой вывод, самый большой образ — это мир как целое, и смысл весь в отношении к этому целому».

Вопросы

1. Символом чего для М. Пришвина является незабудка? (символом целого мира).

2. Почему М. Пришвин не торопится «изучать» незабудку? (при изучении «частей» может исчезнуть понимание «целого»).

3. Почему злой человек не имеет возможности для «расширения души»?

4. Для чего необходимо «расширение души»? (необходимо иметь великодушие, чтобы обнять целое).

5. Можно сказать, что Пришвина беспокоят в первую очередь целостные явления?

Понятие целое значимо не только в этике, но и в геометрии.

**Притча
«Великодушие
Платона»**

Однажды друзья упрекнули Платона в том, что он подал милостыню человеку дурного нрава, он ответил: «Я подаю не нраву, а человеку». На языке математики можно было бы сказать: когда смотришь на окружность, не смотри только на неровность линии, а увидь целое умственными очами, ведь человек никогда не сможет нарисовать идеально ровную окружность. Платон считал, что нарисованные фигуры «служат лишь образным выражением того, что можно видеть лишь мысленным взором». Можно добавить, что и прямую мы никогда не увидим обычными глазами, хотя бы потому, что она устремлена в бесконечность, но мы видим всю прямую умственными очами. Тем самым, Платон верил в человека и видел скрытые в нём возможности.

Вопросы

1. В чём сказалось величие Платона? (Он видел не только «частичного человека», но и «целого человека»).

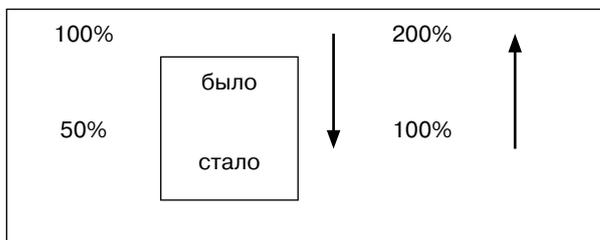
2. Можно ли «делить» человека на «нравы», т.е. на «части»?

3. Как можно назвать человеческое качество, которым обладал Платон? (великодушие)

7. *Задание.* Мы выяснили, что есть такие вещи, которые невозможно делить и дробить.

А какое значение имеет понятие «целое» при решении задач?

• Искомое число уменьшили на 50%. На сколько процентов нужно увеличить полученное число до первоначального?



Вопросы. Как вы думаете, почему число уменьшили на 50%, а чтобы увеличить полученное число до первоначального требуется уже 100%? Что здесь о чём «помнит»?

Ответ. Число «помнит», что оно есть целое, т.е. составляет 100%.

Притча «Сократ и эпикуреец» (эпикуреец — любитель наслаждений)

Однажды к Сократу подошёл эпикуреец и заметил, что если он предложит его ученикам множество различных удовольствий, то они от него уйдут. Сократ неожиданно согласился: может быть, так и произойдёт, ведь с горы скатиться гораздо легче, чем на неё подняться.

В контексте данной истории интересен следующий математический факт: если искомое число уменьшить на 50%, то затем полученное число до первоначального необходимо увеличить уже на 100%. Проценты здесь выступают в роли «долей». А доли — это самые пластичные и живые числа, которые помнят о целом и части, чутко реагируя на различные изменения величин. Данная математическая

операция показывает, что в жизни очень легко нечто утратить, но гораздо сложнее восстановить.

8. Задание. Есть задачи, которые невозможно решить без понятия «целое».

- В бассейн проведено две трубы. Через одну трубу бассейн может быть наполнен за 4 часа, а через другую — за 12 часов. За какое время наполнится бассейн, если будут открыты одновременно обе трубы? (за 3 часа)

Вопросы.

1. Какое число в математике символизирует «целое»? (1 или 100%).

2. Что в этой задаче нужно взять за «целое», или 1? (количество или объём всей воды).

Решение. Пусть объём всей воды мы возьмём за 1. Тогда первая труба за один час наполнит $1/4$ часть (долю) всего бассейна, а вторая — $1/12$. Обе трубы за один час наполнят $1/4 + 1/12 = 1/3$ долю бассейна. Поэтому весь бассейн будет наполнен за: $1 : 1/3 = 3$ (часа).

Вывод урока

Итак, между понятиями «целое», «доля» и «часть» существует глубинная взаимосвязь, которую можно найти как в математике, так и в этике. В основе существования мира лежит гармония части и целого. Данное соответствие между частью и целым усугубляет долю. Благодаря этим понятиям мы приводим в гармонию внешний и внутренний миры.