Заседание НОУ (7–11 классы) «Удивительные свойства окружности»

В.Н. Клепиков

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою».

«Я с детства не любил овал, я с детства угол рисовал» *(Павел Коган)*.

«Меня, наверно, Бог не звал, и вкусом не снабдил утончённым. Я с детства полюбил овал за то, что он такой законченный» *(Наум Коржавин)*.

О Платоне Каратаеве в «Войне и мире» Л.Н. Толстой пишет, что тот олицетворял «всё русское, доброе, круглое».

Введение

С окружностью связывают много различных легенд. Вот одна из них…

Согласно легенде, однажды Зенон в ответ на вопрос, почему он сомневается во всём, нарисовав две неравные окружности, сказал: «Эта большая окружность — мои знания, та малая — твои. Всё, что за пределами окружности, — область неизвестного. Ты видишь, что граница соприкосновения моего знания с неизвестным гораздо больше. Вот почему я сомневаюсь в своих знаниях больше, чем ты».

А вот реальный исторический факт. Великие древние цивилизации Америки, которые создали пирамиды, подобные египетским, и сеть дорог, пожалуй, не хуже наших, украсили пустыню Наска огромными изображениями, видимыми лишь с воздуха, умели предсказывать затмения и вычислять пути планет, производили сложные операции обсидиановыми скальпелями, тем не менее не знали *колеса*! И по их замечательным дорогам не мчались колесницы, не катились повозки, а бежали скороходы, разнося вести, и шли, медленно переставляя ноги, вьючные животные.

Кстати, Пифагор первым сделал интереснейшее предположение, что Земля — *шар*: «Все в природе должно быть совершенно и гармонично. Но совершеннейшее из геометрических тел есть *шар*. Земля тоже должна быть совершенна. Стало быть, Земля — *шар*!»

Давайте совместными усилиями попробуем выявить удивительные свойства окружности. При этом мы отчасти будем задействовать и такие связанные с окружностью фигуры, как круг, сферу и шар.

Исследование-диалог

Знаем ли мы определения окружности, круга, сферы и шара?

Окружность — множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки.

Круг — множество точек плоскости, удалённых от данной точки на расстояние, не превышающее заданное.

Сфера — множество точек пространства, равноудалённых от данной точки.

Шар — множество точек пространства, удалённых от данной точки на расстояние, не превышающее заданное.

Оказывается, дать определение даже самым общеизвестным понятиям не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Известный математик Гратендик, вспоминая свои школьные годы, заметил, что увлёкся математикой после того, как узнал определение окружности.

Есть ли в определениях нечто, что наталкивает на противоречие?

Точка — нульмерна, длина линии окружности — одномерна. Может ли из нульмерных точек состоять одномерная фигура? Может быть, окружность — это точка, движущаяся по определённой траектории с бесконечной скоростью?

Может ли окружность превратиться в сферу, а круг — в шар?

Да, если они начнут вращение вокруг диаметральной оси.

Что можно измерить у данных фигур? Можно ли сказать, что окружность — двумерная фигура?

Периметр можно измерить у всех фигур. Площадь — у круга, сферы и шара. Объём — только у шара. У окружности можно измерить её длину, но каждая точка окружности имеет две координаты — *абсциссу* и *ординату*. Получается, что одномерная фигура — окружность — существует на двумерной плоскости.

Какими величинами являются периметр, площадь, объём: рациональными, иррациональными, теми и другими?

Данные величины выражаются только иррациональными числами, так как у них у всех есть сомножитель π. Существует следующее свойство: сумма, разность, произведение или частное иррационального числа и рационального числа есть *иррациональное число*.

Можно ли утверждать, что при заданном периметре окружность ограничивает наибольшую площадь?

Например, возьмём для сравнения площади круга и квадрата.

Pкр. = Pкв.; Sкр = πR2; Sкв = a2;

Pкр. = 2πR; Pкв. = 4a.

R =P/2π; a = P/4.

Sкр = π(P/2π)2; Sкв = (P/4) 2

Sкр = π(P/2π)2 = P2/4π;

Sкв = P2/16, но 4π < 16.

Значит Sкр. > Sкв.

Интересно, чем является окружность по отношению к описанным около неё и вписанным в неё правильным многоугольникам?

Пусть количество сторон описанных и вписанных правильных многоугольников растёт (рис. 1). Посмотрим, что будет происходить при этом с периметрами вписанных и описанных правильных многоугольников (P — это периметр вписанного

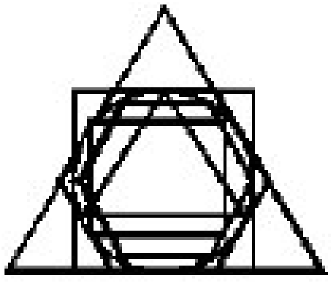


Рис. 1

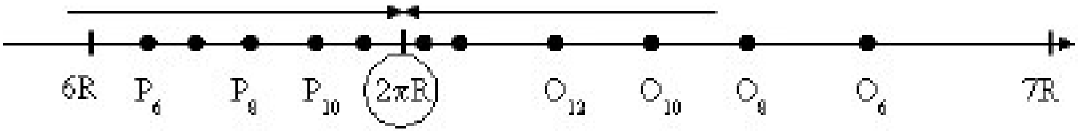


Рис. 2

n-угольного многоугольника, а O — описанного). Если отложить их на числовой прямой, засечки будут сходиться, как дуэлянты (рис. 2).

Уменьшаясь в длине своих сторон, описанные и вписанные правильные многоугольники всё плотнее облегают окружность, всё теснее прижимаются к ней. Периметры тех и других можно рассматривать как всё более точные приближения длины окружности, а общий предел периметров — как точное значение этой длины.

Исследуя процесс приближения, мы найдём искомую величину как предел последовательности её приближённых, всё более уточняющихся оценок.

Можно ли длину *окружности* «измерить» с помощью диаметра, радиуса?

Измерить длину окружности с помощью диаметра или радиуса можно, в это случае мы получим соответственно π и 2π.

Что в этих фигурах или формулах длины окружности и площади круга есть *загадочного*? Что это за число? Существует ли точное значение данного числа?

π — это бесконечная десятичная непериодическая дробь (трансцендентное число), точное значение которой получить невозможно. В школьном курсе математики мы встречаем трансцендентные числа — π и e[1]. В наши дни с помощью компьютера число π вычислено с точностью до миллиона знаков, что представляет скорее технический, чем научный интерес, потому что такая точность никому не нужна. Предполагают, что в бесконечном ряде цифр числа π можно найти любой номер телефона. Однако сам факт существования такого числа в чём-то загадочен.

Почему невозможно решить задачу о квадратуре круга?

Построить с помощью только циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна (равновелика) площади данного круга (рис. 3) невозможно, так как невозможно отложить отрезок длиной π (относительно единицы), т.е. построить отрезок, длина которого равна длине окружности данного круга, невозможно[2]. Строго математически, с помощью линейки и циркуля, это осуществить нельзя. Поиски решения этой задачи продолжались четыре столетия! Лишь в 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал, что с помощью циркуля и линейки эта задача неразрешима.

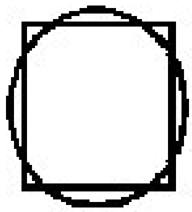


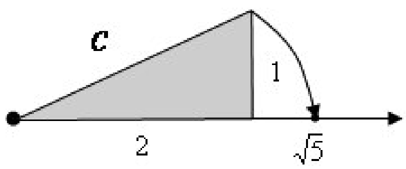
Рис. 3

[1] Доказано также, что lg2 тоже трансцендентное число.

[2] Доказано, что с помощью циркуля и линейки можно построить лишь такие геометрические фигуры, площадь которых выражается алгебраическим числом.

Хотя «физически» это сделать можно: взять нитку, протянуть её по линии окружности и отложить на числовой прямой. Однако древнегреческих математиков такой эмпирический, опытный подход к определению длины (построению π) не удовлетворял: окружность — это линия, т.е. по Евклиду, «длина без ширины», а таких «нитей» не бывает. Древние греки были достаточно педантичными математиками…

Покажем, как на числовом луче с помощью циркуля и линейки отложить иррациональное число (рис. 4), например, для этого подберём натуральные числа, сумма квадратов которых равна $\sqrt{5}$ (22 + 12 = 5). Далее начертим прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2, и затем с помощью циркуля отложим точку, которая и будет соответствовать длине гипотенузы – $\sqrt{5}$.



$$c=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

Рис. 4

Для того чтобы отметить на числовом луче $\sqrt{6}$, нужно начертить прямоугольный треугольник с катетами 2 и $\sqrt{2}$. При этом отрезок (гипотенуза) длиной $\sqrt{2}$ получается в прямоугольном треугольнике с помощью длин катетов 1 и 1. Так с помощью теоремы Пифагора и описанного алгоритма мы сможем отметить числа $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ и т.д. и т.д.

Однако представить число π с помощью знака радикала невозможно!

Почему при построении треугольника мы используем окружность? Возможно ли без окружностей построить точку A (рис. 5)?

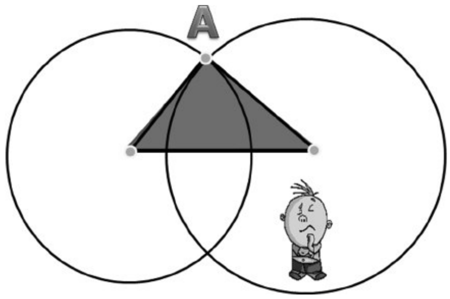


Рис. 5

Без циркуля и линейки построение многих геометрических фигур будет затруднительно или невозможно. Циркуль и линейка обеспечивают наиболее точное построение геометрических фигур. Однако с помощью этих инструментов не все построения можно осуществить. Например, невозможно решить три классические задачи: «квадратура круга» (построение квадрата равновеликого данному), «трисекция угла» (деление произвольного заданного угла на три равновеликие части), «удвоение куба» (построение куба, объём которого вдвое больше объёма заданного куба).

Верно ли, что вокруг любого треугольника можно описать и вписать окружности? Где находятся центры этих окружностей? Когда центры описанной и вписанной окружностей совпадают?

Центр описанной окружности находится на серединных перпендикулярах, проведённых к сторонам треугольника. Центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис углов. Центры совпадают у равностороннего треугольника.

Приведём в этой связи математическую байку.

PT_1_12.indd 47 15.03.2012 18:21:40

«Деликатная об☺льстительница»

— Вы мне нравитесь, — искренне призналась окружность треугольнику.

— Но мы с вами не пара, милочка, ведь я такой разносторонний, к тому же у меня целых три вершины, а вы однообразно круглая, — отрезал высокомерно треугольник.

— Какой вы наивный, — мягко парировала окружность, — по секрету сообщу вам, что окружность... вписывается в любой треугольник.

Действительно ли окружность такая «безликая» или на ней есть особенные точки?

Окружность Эйлера. Какие девять точек связывают с окружностью?

Это окружность, найденная в XVIII веке великим учёным Л. Эйлером (поэтому её часто также называют «окружностью Эйлера» — рис. 6).

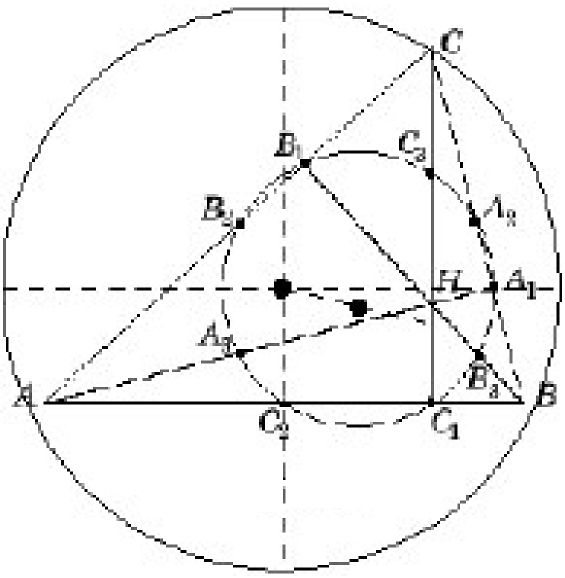


Рис. 6. Окружность Эйлера

У каждого треугольника есть, и притом единственная, окружность девяти точек. Это окружность, проходящая через следующие тройки точек, положение которых определено для треугольника: основания высот С1, А1, В1, основания его медиан С2, А2, В2, середины С3, А3, В3 отрезков прямых от точки пересечения его высот Н до его вершин.

Окружность эту очень легко построить, если знать два её свойства. Во-первых, центр окружности девяти точек лежит в середине отрезка, соединяющего центр описанной около треугольника окружности с точкой Н — его ортоцентром (точка пересечения его высот). Во-вторых, её радиус для данного треугольника равен половине радиуса описанной около него окружности.

Точки Фейербаха. Окружность Эйлера была заново открыта учителем провинциальной гимназии Карлом Фейербахом. Дополнительно К. Фейербах выяснил, что окружность девяти точек имеет ещё четыре точки, тесно связанные с геометрией любого данного треугольника. Это — точки её касания с четырьмя окружностями специального вида (рис. 7). Одна из этих окружностей вписанная, остальные три — невписанные. Они вписаны в углы треугольника и касаются внешним образом его сторон. Точки касания этих окружностей с окружностью девяти точек называются «точками Фейербаха». Таким образом, окружность девяти точек является в действительности окружностью тринадцати точек.

Сколько осей (диаметральных) симметрии, проходящих через центр, имеет окружность?

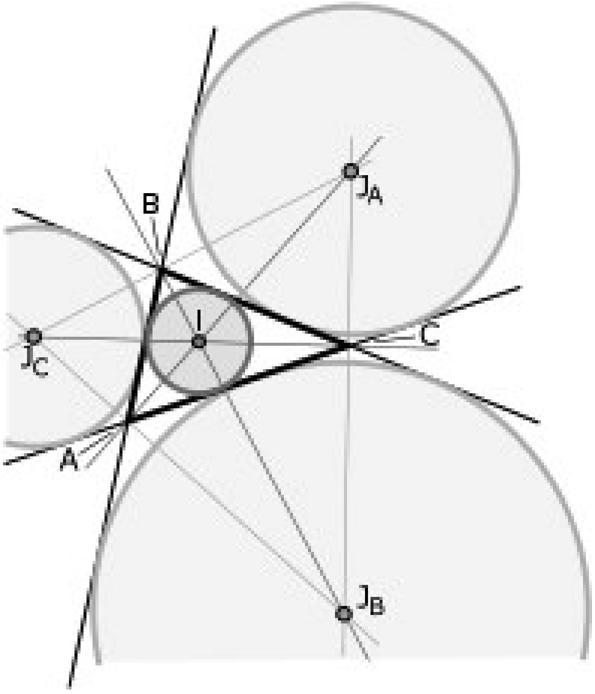


Рис. 7. Точки Фейербаха

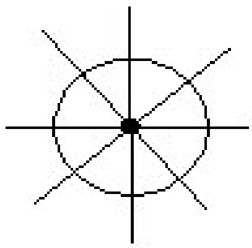


Рис. 8

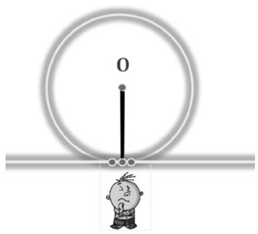


Рис. 9

Она имеет бесконечное множество диаметральных осей симметрии (рис. 8).

Софисты Древней Греции доказывали, что прямая и окружность касаются в нескольких точках и показывали это с помощью наглядного чертежа, так ли это? Всегда ли «наглядность» является доказательством?

Это не так, поскольку, если мы проведём в две точки (предположительно) касания радиусы, то получится равнобедренный треугольник с двумя прямыми углами, которые уже дают 180°, что невозможно по свойству треугольника.

Чтобы наглядно показать, что «наглядность» не является доказательством, продемонстрируем рисунок 10. Что на нём изображено: спираль или концентрические *окружности*?

Мы видим спираль, но на самом деле это окружности. Таким образом, в геометрии наглядность не является доказательством, как, впрочем, нередко и в жизни.

Рис. 10

Аристотель как-то высказал следующую мысль: «Добродетель, по-видимому, есть некая середина между противоположными страстями. Недаром человек, желающий быть уважаемым за свой нрав, должен соблюдать середину во всяком движении чувств. Оттого и трудно быть достойным человеком, ведь в любом деле трудно держаться середины. Например, круг начертить может всякий, но установить его середину непросто...».

Как же найти центр круга?

Для нахождения центра достаточно провести два серединных перпендикуляра к двум хордам (рис. 11).

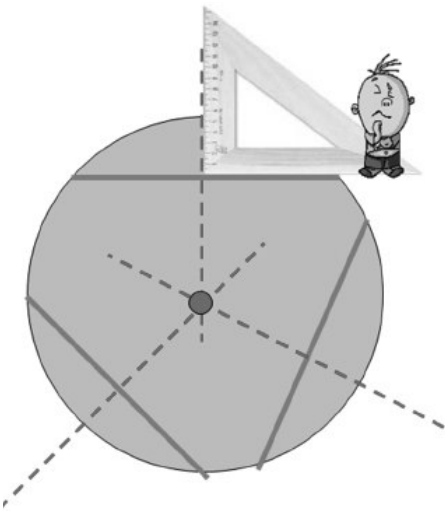


Рис. 11

В тригонометрии многие примеры и задачи можно решить с помощью единичной окружности.

Например, быстро сравнить синусы или косинусы углов (рис. 12).

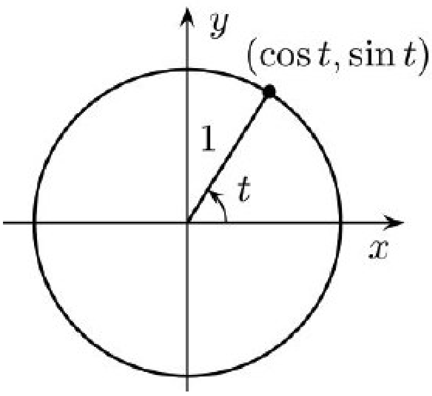


Рис. 12

Существуют очень изящные задачи, связанные с окружностью и кругом. Первый пример связан с соотношением окружностей и фигур, получаемых при их пересечении.

Удивительным и интересным на рисунке 13 является тот факт, что площади «луночки» и криволинейного треугольника равны. Действительно, площадь маленького круга в четыре раза меньше площади большого, отсюда площадь четырёх маленьких кругов равна площади большого круга. При этом четыре луночки покрываются дважды, а четыре треугольника не покрываются ни разу. Отсюда вытекает равенство площадей луночки и треугольника.

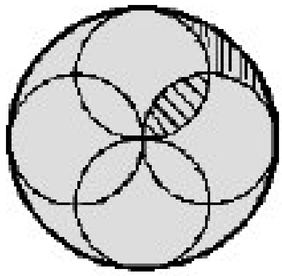


Рис. 13

На рисунке 14 мы видим подобные криволинейные треугольники: большие и малые. Площадь большого в 4 раза больше малого, но, так как малых треугольников на рисунке в 4 раза больше, чем больших, их площади равны.

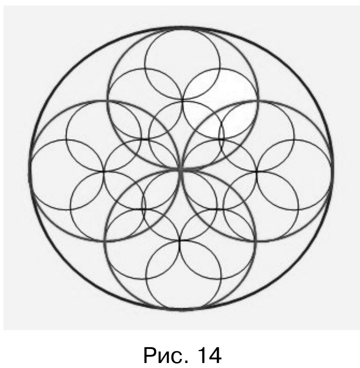


Рис. 14

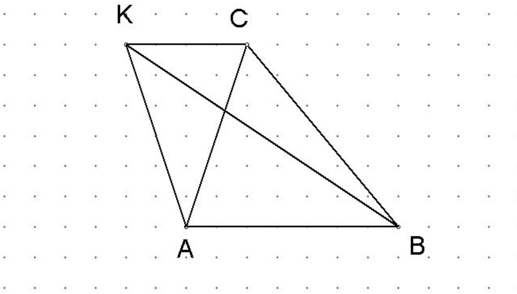


Рис. 15

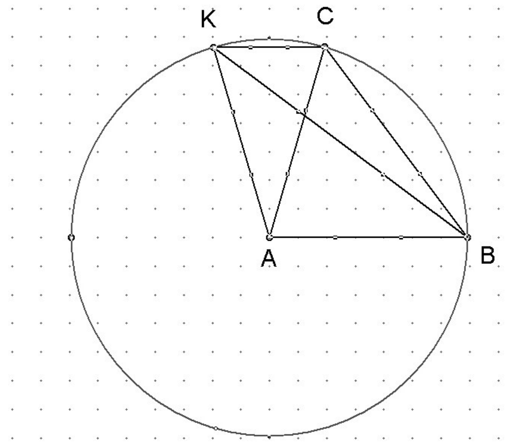


Рис. 16

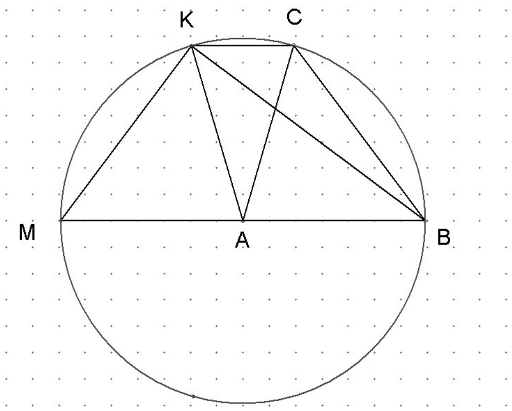


Рис. 17

Помогают ли окружности при решении геометрических задач?

Красота и величие окружности проявляются при решении таких задач, в которых «возникает» геометрическая ситуация, на первый взгляд, кажущаяся неразрешимой. И в этот момент, при достаточно внимательном анализе и изучении «геометрической картинки», появляется «вспомогательная окружность». С появлением вспомогательной окружности удаётся разрешить возникшее трудное положение.

Метод решения геометрических задач с привлечением вспомогательной окружности называется «методом вспомогательной окружности».

Задача 1. В трапеции ABCK длины оснований AB, диагонали AC и боковой стороны равны 10. Длина стороны BC = 12. Найдите длину диагонали BK (рис. 15).

Решение

1 (рис. 16). Так как AB = AC = AK = 10, то точки B, C и K равноудалены от точки A, поэтому они принадлежат окружности с центром A и R = 10 (появилась «вспомогательная» окружность!). Пусть M — точка пересечения этой окружности с продолжением основания AB, тогда BM = 2AB = 20.

2 (рис. 17). Так как CK || AB в трапеции ABCK (параллельные прямые высекают на окружности равные хорды), то дуги BC и MK окружности равны, значит, равны и хорды BC и KM, стягивающие эти дуги. Поэтому MK = BC = 12, причём $\angle$BKM = 90° (как вписанный, опирающийся на диаметр). Тогда в прямоугольном ΔBKM по теореме Пифагора: BK2 = BM2 – MK2 = 202 – 122 = 256; BK = 16.

3. Ответ: BK = 16.

Вывод: В данной задаче «вспомогательная» окружность нам понадобилась для того, чтобы доказать равенство хорд ВС и МК, которые стягивают равные дуги.

С помощью окружности можно моделировать различные эстетически выразительные формы.

Важна ли идея совершеннейшей формы в русской культуре?

Хоровод символизирует слаженность, единство, взаимность, взаимопонимание, радость, гармонию, мелодию. *Хорс* — славянский бог солнечного света. Имя бога отражено в словах: хороший, похорошеть, прихорашиваться, хоровод, хоромы и т.д. Слово «хоро» обозначает солнечный диск, круг.

Купол над храмом символизирует собою свод, сферу небесную, покрывшую землю. В храме утверждается то внутреннее соборное объединение, которое должно победить хаотическое разделение и вражду мира и человечества (Е. Трубецкой).

Каравай в русской культуре всегда был символом душевного, тепла, щедрости, любви, семейного единства, благоговейного отношения к хлебу, свадьбы, желанной встречи (рис. 18).

Как символ окружности используется в поэзии?

Так завершенная окружность
Сама в себе заключена
И лишняя штриха ненужность
Ей незавидна и смешна.
(Белла Ахмадулина)

Одиночество, как твой характер крут!
Посверкивая циркулем железным,
Как холодно ты замыкаешь круг,
Не внемля увереньям бесполезным.
(Белла Ахмадулина)

Сравните высказывания Омара Хайяма и старца Амвросия. О чём они хотят нам поведать? Какое мироощущение вам ближе?

Я вчера наблюдал, как вращается круг,
Как спокойно, не помня чинов и заслуг,
Лепит чаши гончар из голов и из рук,
Из великих царей и последних пьянчуг.
(Омар Хайям)

Мы должны жить на земле так, как колесо вертится: только чуть одной точкой касаться земли, а остальным непрестанно вверх стремиться; а мы как заляжем на землю и встать не можем.
(Старец Амвросий)

Заключение

Какие же удивительные свойства были обнаружены?

1. Окружность — это одномерная линия, которая состоит из нульмерных точек.

2. Окружность — одномерная фигура, и одновременно каждая её точка имеет две координаты, т.е. она существует на двумерной плоскости.

3. С окружностью связано самое загадочное число — π, которое невозможно отложить с помощью циркуля и линейки относительно 1, а значит, решать задачу на квадратуру круга.

4. Радиус окружности может выражаться рациональным и иррациональным числом, длина же окружности всегда иррациональное (трансцендентное) число.

5. Хотя квадрат является наиболее удобной фигурой для заполнения пространства плоскости, однако

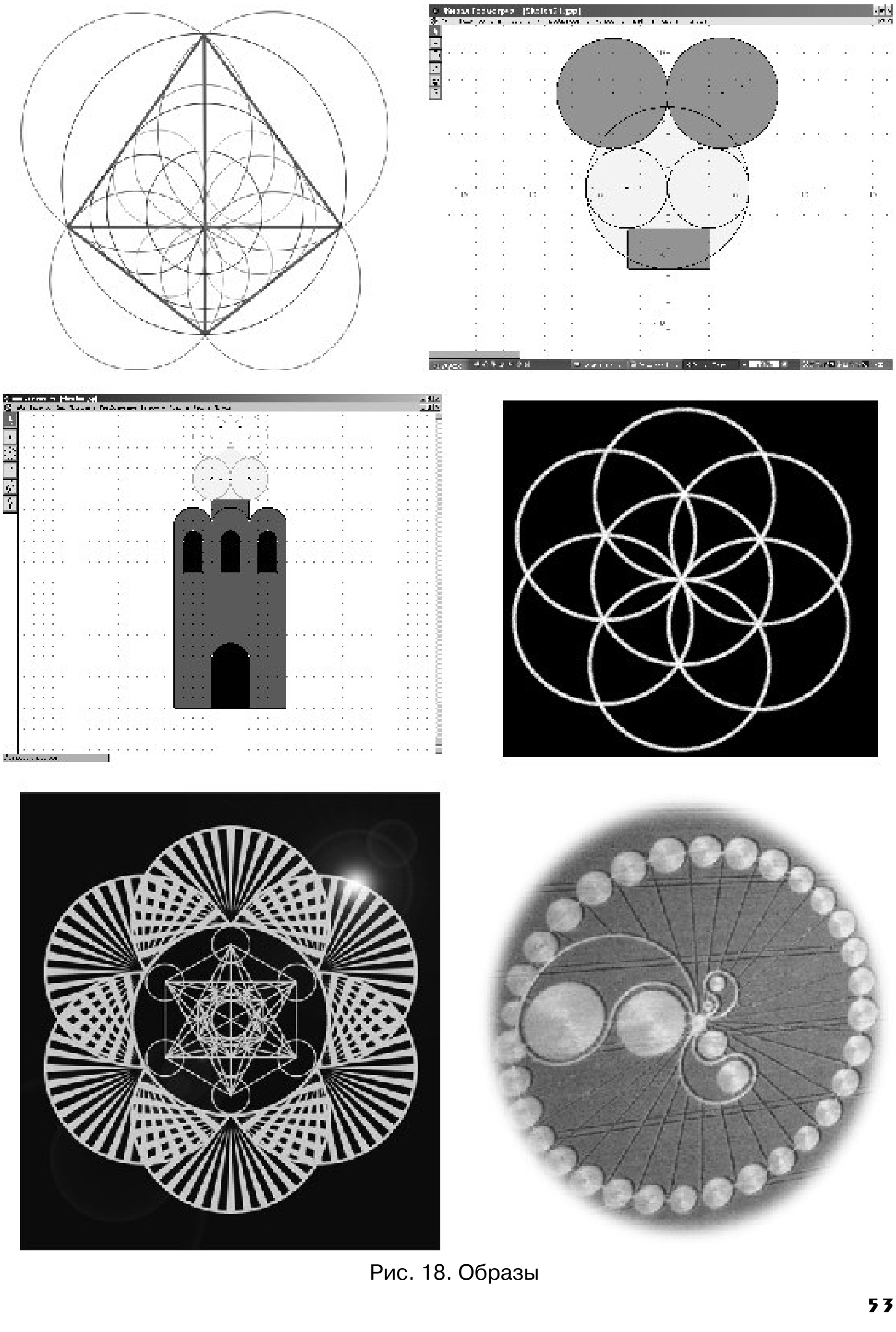


Рис. 18. Образы

периметр окружности из всех фигур ограничивает наибольшую площадь.

6. Окружность обладает множеством замечательных точек, которые опровергают миф о безликости и однообразии окружности (девять точек Эйлера и четыре точки Фейербаха).

7. В пространстве окружности и с помощью окружности построение фигур осуществляется гораздо быстрее. Можно сказать, что это своеобразное «лоно», которое порождает наиболее гармоничные фигуры. С помощью «вспомогательной окружности» решение некоторых геометрических задач происходит быстрее и более эффектно.

8. Когда мы говорим о равновесии, гармонии, симметрии, то в первую очередь вспоминаем окружность. С помощью окружности и окружностей можно моделировать различные эстетически выразительные формы, которые обладают очень гармоничными отношениями.

9. Окружность благодаря её свойствам во все времена имела на людей мистическое воздействие. Недаром её до сих пор люди обожествляют. Существует мнение, что инопланетяне общаются с нами посредством «кругов на полях».

10. Символ окружности играет огромную роль в русской культуре. Он очень часто встречается в религии православия, в культурных текстах, определяет структуру различных художественных произведений.

Литература

Волошинов А.В. Математика и искусство. М., 1992.

Мигдал А. О красоте науки // Наука и жизнь. 1983. № 3.

Неаполитанский С.М., Матвеев С.А. Сакральная геометрия. СПб., 2004.

Пухначёв Ю.В., Попов Ю.П. Математика без формул. М., 2007.

Энциклопедический словарь юного математика. М., 1989.

Примерные темы исследовательских работ

1. Тайны и загадки числа π.
2. Решение геометрических задач с помощью вспомогательной окружности.
3. Сравнительный анализ куполов православного и готического храмов.
4. Значение хоровода в русской культуре.
5. Композиция иконы А. Рублёва «Троица».
6. Идея шара в романе Л.Н. Толстого «Война и мир».
7. Каравай в истории славянской культуры.
8. «Круги на полях» — космические знаки или тайное искусство землян?