

## Формирование умений видоизменять геометрические задачи

Н.Н. Егулева

Многие учёные неоднократно подчёркивали роль видоизменений в процессе работы с задачами различного рода. В связи с этим специфика проводимых видоизменений будет определяться целью работы по решению задачи: нахождение задачи для выделения идеи решения, переформулировка задачи для нахождения метода решения, замена задачи её обобщением для формулирования общего алгоритма решения и т.д. Видоизменение задач — одно из необходимых умений школьников, формирование которых должно осуществляться поэтапно.

Видоизменение задачи представляет собой процесс получения новой задачи, который начинается с выбора цели и предмета исследования, на основании которых определяется задачная ситуация. Далее идёт этап анализа полученной ситуации, выявления связей

между объектами, поиск закономерностей и как результат — получение нового знания. Для успешного освоения приёмов видоизменения геометрических задач учащиеся должны хорошо разбираться в структуре задачи, выполнять такие мыслительные операции, как анализ, синтез, индукция, дедукция, сравнение, конкретизация и обобщение. При формировании рассматриваемых приёмов учащимся предлагаются учебные задания, цель которых — выяснить, как может быть составлена данная задача, какая идея лежит в основе, какой теоретический материал может быть использован.

В упражнениях по видоизменению геометрических задач должны быть зафиксированы определённые объекты и отношения между ними, то есть должна быть частично определена предметная область составленной задачи. Данные объекты и отношения будут являться источником для задачного творчества учащихся. Они могут быть заданы словесно, зафиксированы на чертеже, зашифрованы в краткой записи или формуле.

В первую очередь можно рассмотреть такие упражнения по составлению геометрических задач, когда известны все объекты и отношения предметной области задачи. Другими словами, предлагаются задания по составлению геометрической задачи по исходной задаче. Эти приёмы основываются на преобразованиях компонентов задачи, т.е. видоизменении условия, требования или условия и требования одновременно.

Представим несколько блоков упражнений по обучению школьников видоизменению задач, которые будут соответствовать *первому* этапу.

**Блок № 1. Видоизменение условия задачи.**

**Задание 1.** Две стороны треугольника  $ABC$  равны 6 см и 5 см, а угол между ними  $60^\circ$ . Найти длину третьей стороны.

Замените числовые данные задачи.

Сформулируйте задачу для треугольника частного вида (например, равнобедренного, прямоугольного).

Сформулируйте задачу для общего случая.

**Задание 2.** В задаче есть лишние данные: Две стороны треугольника  $ABC$  равны 6 см и 5 см, а угол между ними  $60^\circ$ . Найти длину третьей стороны, если длина высоты к ней равна  $\frac{15\sqrt{93}}{31}$ .

Сформулируйте несколько задач с одинаковыми требованиями, но разными условиями.

**Блок № 2. Видоизменение требования задачи.**

**Задание 1.** Измените требование задачи: В трапеции длины диагоналей равны  $2\sqrt{61}$  и  $3\sqrt{41}$ , а длины оснований 10 и 15. Найдите площадь трапеции.

**Задание 2.** Дополните требование задачи новым так, чтобы сформулированная задача решалась на основе результата, полученного в предыдущей задаче: В трапеции длины диагоналей равны  $2\sqrt{61}$  и  $3\sqrt{41}$ , а длины оснований 10 и 15. Найдите площадь трапеции.

**Задание 3.** Сформулируйте несколько вопросов к условию исходной задачи и укажите, как они связаны (есть ли в списке задач такие,

которые бы решались на основе решения других, использовалась бы идея решения предыдущей задачи): В трапеции длины диагоналей равны  $2\sqrt{61}$  и  $3\sqrt{41}$ , а длины оснований 10 и 15. Найдите площадь трапеции

**Блок № 3. Видоизменение условия и требования задачи.**

**Задание 1.** Дополните условие и требование задачи: Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а радиус вписанной окружности равен 2 см. Найдите медиану, проведённую к гипотенузе треугольника.

**Задание 2.** Измените часть условия и вопрос задачи: В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AC = CB$ ) проведена медиана  $CC_1$  и биссектриса  $AA_1$ . Найдите угол  $ACB$ , если  $AA_1 = 2 CC_1$ .

**Задание 3.** Замените два условия и вопрос задачи: В остроугольном треугольнике  $ABC$  длины медиан  $BM$  и  $CN$  и высоты  $AN$  равны соответственно 4, 5 и 6. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Задание 4.** Измените условие задачи так, чтобы её можно было сформулировать со словом «доказать...»: Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого совпадают с серединами сторон данного четырёхугольника, площадь которого равна  $Q$ .

Количество заданий, сами задания и вспомогательные вопросы могут варьироваться в зависимости от уровня подготовки учащихся. Работа на данном этапе поможет учащимся овладеть основными приёмами видоизменения геометрических

задач и подготовит их к дальнейшей деятельности.

Видоизменять можно не только внешнюю структуру задачи, но и логическую. Под логической структурой геометрической задачи понимается способ связи между известными и неизвестными элементами. Здесь целесообразно обратить внимание на такие способы преобразования логической структуры, как: составление задачи, обратной данной, составление задачи, противоположной данной, составление задачи, обратной к противоположной. Обучение данным типам видоизменений будет целесообразно на *втором* этапе.

#### Блок № 4. Видоизменение логической структуры задачи.

**Задание 1.** Доказать, что если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то длина высоты трапеции равна длине средней линии.

1. Сформулируйте обратную задачу к исходной задаче.

2. Составьте противоположную задачу к исходной, дополнив требование задачи: Доказать, что если диагонали равнобокой трапеции не будут взаимно перпендикулярными, то...

3. Сформулируйте признак равнобокой трапеции, используя исходную задачу.

#### Блок № 5. Переформулировка задачи.

**Задание 1.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных ему хорд постоянна.

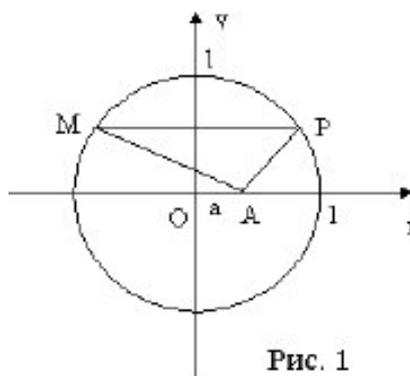


Рис. 1

Используя рисунок к задаче (рис. 1), сформулируйте требование задачи на языке координат.

**Задание 2.** Предложенную задачу переформулируйте на язык векторов: В треугольнике  $ABC$  на основании  $AC$  взяты точки  $P$  и  $Q$  так, что длина отрезка  $AP$  меньше длины отрезка  $AQ$ . Прямые  $BP$  и  $BQ$  делят медиану  $AM$  на три равные части. Известно, что  $PQ = 3$ . Найдите  $AC$ .

**Задание 3.** Сформулируйте геометрический аналог к практической задаче: Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жёлоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы жёлоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землёй. Найдите длину жёлоба.

Задания этих блоков подбираются в соответствии с принципом «от простого к сложному». Организовать работу с учащимися можно как в форме коллективного обсуждения вариантов решения заданий, так и предлагать ученикам самостоятельно осуществить поиск, поскольку задания следующих блоков ориентированы именно на самостоятельность школьников при составлении задач.

Блок упражнений на самостоятельное составление геометрических задач отличается от предыдущего неполным набором объектов и отношений предметной области задачи. Дополнение условия (требования или того и другого одновременно) расширяет предметную область задачи. А поскольку множество неопределённых объектов и отношений шире, то и количество составленных задач по данным основаниям больше. Возможны следующие варианты заданий на составление геометрических задач: составление задачи по части условия, составление задачи по требованию, составление задачи по основному отношению (решению, формуле, уравнению) — их можно предложить учащимся на *третьем* этапе работы.

**Блок № 6. Дополнение недостающих условий задачи.**

**Задание 1.** Подберите в условии задачи такие данные, чтобы задача имела: а) одно решение, б) несколько вариантов решения, в) не имела решений. *Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 20π. Найдите площадь этого треугольника, если его основание равно...*

**Задание 2.** В сформулированной задаче недостаточно данных, дополните условие: *В треугольнике ABC точка H — ортоцентр. Найдите отрезок AH, если AB = 13 см, BC = 14 см.*

**Задание 3.** В предложенной задаче имеются противоречивые условия, найдите их и сформулируйте задачу корректно: *В треугольнике ABC сторона AB = 3 м, высота CH, опущенная на AB, имеет длину  $\sqrt{2}$  м.*

*Основание высоты CH делит сторону AB так, что AH = BC. Найдите длину стороны AC.*

**Блок № 7. Дополнение требования задачи**

**Задание 1.** Сформулируйте требование к условию задачи: *Около прямоугольника со сторонами 4 и 3 описана окружность. Найдите ...*

**Задание 2.** По предложенному рисунку сформулируйте задачи (рис. 2).

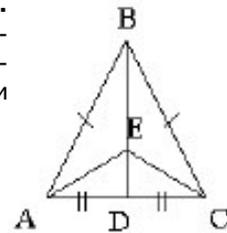


Рис. 2

**Блок № 8. Формулировка задач по решению**

**Задание 1.** Сформулируйте задачу так, чтобы в её решении присутствовало данное уравнение:

$$(x - 5) \times x = 24.$$

**Задание 2.** Сформулируйте задачу, решение которой сводится к использованию формулы  $S_{кр} = \pi R^2$ .

**Задание 3.** Составить задачу так, чтобы в её решении использовалась идея удвоения медианы треугольника.

Для формирования представленных приёмов самостоятельного составления геометрических задач учащимся можно предлагать задания на отработку отдельных элементов их применения:

- выделить неизвестное условие в задаче;

- выбрать из предложенного списка требований такой вариант, который бы удовлетворял условию задачи;
- определить базис решения задачи;
- проанализировать рисунок и обозначить данные и искомые;
- подобрать различные варианты данных, связанных следующей зависимостью:  $a \cdot b = c$ ;
- найти основную идею решения задачи и т.д.

Изучив процесс обучения школьников видоизменению геометрических задач, мы можем определить следующие основные этапы его формирования: первый этап — обучение видоизменению компонентов задачи, включающее в себя необходимую мотивацию деятельности по видоиз-

менению задач и непосредственную подготовку к выполнению более сложных видоизменений; второй этап — обучение видоизменению логической структуры задачи; третий этап — обучение самостоятельному составлению задач, представленных некоторыми начальными данными (частью условия, требованием, решением и т.д.).

Вовлечение учащихся в деятельность по видоизменению геометрических задач создаёт условия не только для обучения их основным приемам варьирования задач, но и стимулирует развитие их творческой инициативы и познавательной самостоятельности. Таким образом, обучение школьников видоизменению геометрических задач целесообразно использовать как эффективное средство их развития.