Владимир Дмитриевич Селютин, *заведующий кафедрой алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета, доктор педагогических наук.*

Виктор Николаевич Юшин, *профессор кафедры физики Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, кандидат педагогических наук*

МОНИТОРИНГ — ОЧЕРЕДНОЕ ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЕ УВЛЕЧЕНИЕ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ

В статье обосновывается целесообразность введения в курсы физики и теории вероятностей представлений о случайных броуновских фракталах и важнейших характеристиках описания стохастических процессов.

Важнейшее условие успешного развития высшей школы на современном этапе — разработка новых учебных курсов и программ, которые позволяют профессионально подготовить новое поколение исследователей и инженеров. Не менее важно органично включать в содержание фундаментальных дисциплин достижения современной науки.

В предисловии к знаменитым Фейнмановским лекциям по физике известный советский физик Я. Смородинский писал: «Поиск новых путей в преподавании всегда был важной частью науки. Преподавание, следуя развитию науки, должно непрерывно менять свои формы, ломать традиции, искать новые методы. Здесь важную роль играет то обстоятельство, что в науке всё время происходит процесс своеобразного упрощения, который позволяет просто и кратко изложить то, что когда-то потребовало много лет работы»[1].

В современной науке для описания различных явлений и процессов используются динамические и статистические методы. Динамические законы описывают объекты исследования с помощью усреднённых характеристик, пренебрегая различными возмущениями. В тех же случаях, когда наблюдается сложное непредсказуемое поведение исследуемой системы, применяются статистические методы.

Стохастическое поведение физической системы может быть обусловлено не только случайными изменениями её параметров, случайными внешними воздействиями, но

[1] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1976. Т. 1.

и развитием в системе разнообразных неустойчивостей. Последняя причина часто приводит к возникновению детерминированного хаоса.

Указанные факторы приводят к стохастизации сигналов и структур, характеризующих поведение и состояние системы. Для изучения стохастических процессов чаще всего привлекаются разнообразные вероятностные подходы.

В основе таких подходов лежат методы статистического анализа случайных величин и функций. Часто они сводятся к определению таких характеристик, как плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсия, моменты высоких порядков, автокорреляционные функции, спектральные плотности. При проведении статистического анализа широко используются элементы математической статистики, включающие теорию выборок, оценки доверительных интервалов, проверку статистических гипотез, способы аппроксимации экспериментальных данных. Указанные методы и подходы стали традиционными. Наряду с ними в последние годы получили распространение и некоторые новые способы анализа сложных процессов, основанные на фрактальном анализе.

Отличительная особенность последнего в том, что наряду с глобальными характеристиками стохастических процессов (получающихся в результате использования процедуры усреднения по большим временн***ы***м интервалам) фрактальный анализ позволяют вскрыть особенности локальной структуры процесса.

Важная характеристика методов, основанных на фрактальных представлениях, их универсальность. Они используются для исследования широкого круга сложных нерегулярных явлений, как в естественных, так и в гуманитарных науках.

Понятие о случайных фракталах естественным образом можно ввести при рассмотрении броуновского движения. На рис. 1 показано, как выглядит под микроскопом типичная траектория частицы, совершающей броуновское движение.

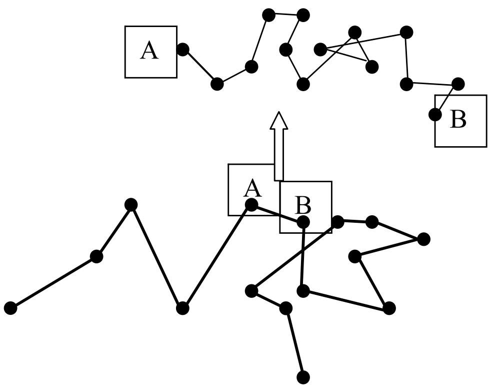

Рис. 1

Если фиксировать положение частицы через какие-то не слишком малые промежутки времени, то получается картина, подобная приведённой на рис. 1. Если увеличить разрешение микроскопа и временное разрешение, с которым регистрируется движение, то вновь наблюдается случайное блуждание частицы. При этом отрезок прямой, соединяющий точку А с точкой В, превращается в ряд более коротких прямолинейных отрезков, изображающих случайное блуждание.

Аналогичная ситуация будет наблюдаться при более точной регистрации движения частицы между точками С и D. Броуновское движение является статистически самоподобным. У каждого реального самоподобного процесса имеется наибольший и наименьший масштаб: нельзя бесконечно увеличивать или уменьшать масштаб. В случае броуновского движения диапазон масштабов, в пределах которого сохраняется самоподобие, очень велик — от размеров сосуда с жидкостью (допустим, 0,1 м) до длины свободного пробега молекул между столкновениями. В результате этого коэффициент подобия для броуновского движения может достигать 10^8.

Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому[2]. Самоподобие как основная характеристика фрактала означает, что он более или менее единообразно устроен в широком диапазоне масштабов. Так, при увеличении маленькие фрагменты фрактала получаются очень похожими на большие. Это предопределяет масштабную инвариантность (скейлинг) основных геометрических особенностей фрактального объекта, их неизменность при изменении масштаба. В отличие от геометрических фракталов для реального природного фрактала существуют некоторые минимальный и максимальный масштабы длины, ограничивающие область (область скейлинга), вне пределов которой основное свойство фрактала — самоподобие — пропадает.

Фрактальные формы широко распространены в природе: это извилины берегов морей и рек, очертания облаков, гористый рельеф, контуры снежинок, контуры дерева, сосудистая система человека и т.д. Известны фрактальные структуры веществ, фрактальные структуры множеств и случайных процессов. При проведении физических исследований фрактальные признаки могут быть обнаружены в структуре регистрируемых сигналов и полей. Часто фрактальность проявляется в поведении функций, характеризующих распределение физических величин во времени и пространстве.

Более детально описать фрактальные свойства стохастических процессов можно, если рассмотреть модель броуновского движения. Простейшей аппроксимацией броуновского движения служит одномерное случайное блуждание[3]. В этом случае частица первоначально располагается в точке $x_0 = 0$ на прямой x. Частица совершает шаг вправо или влево на случайную величину $+\Delta x$ или $-\Delta x$ каждые τ секунд.

Классическая модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения Δx на интервале времени τ имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним. Во-вторых, приращения на неперекрывающихся временных интервалах статистически независимы.

Пусть Δx — нефиксированная величина, имеющая нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием, равным нулю:

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right)$$

На каждом интервале длительностью τ длина шага Δx выбирается случайным образом. В соответствии с формулой Эйнштейна для броуновского движения средний квадрат

---

[2] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. М.: Институт компьютерных исследований. 2002.

[3] *Федер Е.* Фракталы / Е. Федер. М.: Мир, 1991.

длины шага $<\Delta x^2> = 2D\tau$, где D — коэффициент диффузии. Среднее значение координаты частицы равно $<x(t) - x(t^0)> = 0$. Дисперсия приращения броуновского сигнала

$$\sigma^2 = <[x(t) - x(t_0)]^2> = 2D(t - t_0) = 2D\tau,$$

поэтому $p(\Delta x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{4D\tau}\right)$. 1)

Довольно часто дисперсия приращения броуновского процесса записывается в виде $\sigma^2(t_2 - t_1)$, где σ^2 — дисперсия за единицу времени[4]. В этом случае распределение вероятностей принимает вид:

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right)$$

На рис. 2 изображена зависимость координаты частицы от времени измеренного в единицах интервала τ.

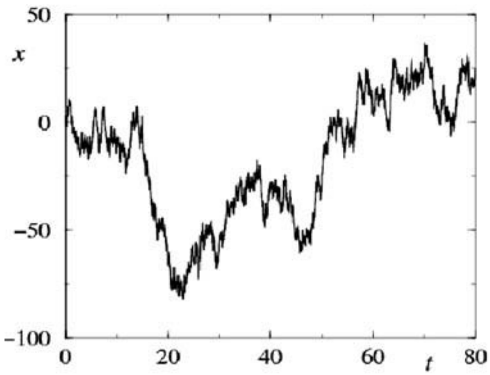

Рис. 2

Свойство броуновских диаграмм не менять «вида» при изменении разрешения называется масштабной инвариантностью. Это свойство подобия (скейлинга) броуновского движения можно выразить в явном виде, преобразовав соотношение (1) с помощью замены $\Delta\hat{x} = b^{1/2}\Delta x$, $\hat{\tau} = b\tau$, т.е. изменив масштаб времени в b раз, а масштаб длины — в $b^{1/2}$ раз. В результате такого преобразования получаем следующее соотношение подобия для плотности вероятности:

$$p(b^{1/2}\Delta x, b\tau) = b^{1/2} p(\Delta x, \tau).$$

Это соотношение показывает, что броуновский случайный процесс инвариантен в смысле распределения при преобразовании, которое меняет масштаб времени в b раз, а масштаб длины в $b^{1/2}$ раз.

Преобразования, которые меняют масштабы времени и расстояния в разных пропорциях, называются аффинными, а зависимости, которые в некотором смысле сохраняют свой вид при аффинном преобразовании, называются самоафинными.

При описании свойств фрактала важную роль играет фрактальная размерность. Определение такой его характеристики, как фрактальная размерность, можно дать следующим образом. Пусть d — обычная размерность пространства, в котором находится наш фрактальный объект ($d = 1$ — линия, $d = 2$ — плоскость, $d = 3$ — обычное трёхмерное пространство). Пусть фрактальный объект располагается на плоскости. Покроем теперь этот объект целиком квадратами со стороной σ. Предположим, что нам потребовалось для этого не менее, чем $N(\delta)$ квадратов. Тогда, если значение $N(\delta)$ изменяется при изменении δ так, что зависимость $N(\delta)$ определяется степенным законом $N(\delta) \sim 1/\delta^d$, то d называется размерностью

---

4 *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. М.: Постмаркет, 2000.

Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью этого объекта.

Используя понятие фрактальной размерности, Мандельброт дал более строгое, чем приведённое выше, определение фрактала. Согласно этому определению, фрактал представляет собой объект, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого больше его топологической размерности (0 — для россыпи точек, 1 — для кривой, 2 — для поверхности и т.д.).

Формулу для определения фрактальной размерности можно переписать также в виде

$$d = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}.$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности d. В соответствии с ним величина d является локальной характеристикой данного объекта.

Наличие самоподобия в характере изменения приращений на различных интервалах позволяет распространить стандартную процедуру определения фрактальной размерности на график модели броуновского движения. Сделаем это следующим образом. Пусть интервал, на котором определена зависимость смещения от времени, равен [0, 1]. Разделим этот интервал на n равных подинтервалов одинаковой длины $\Delta t = 1/n$ и таким же образом разделим вертикальную ось на подинтервалы длины Δt. Выражение $|\Delta x|/\Delta t|$ служит в качестве оценки числа квадратов размера Δt, необходимых для покрытия части графика $y = x(t)$, расположенной над одним подинтервалом. Так как математическое ожидание величины $|\Delta x|$ пропорционально $\sqrt{\Delta t}$, то число квадратов, необходимых на одном подинтервале, пропорционально $\sqrt{\Delta t}$. Всего имеется $1/\Delta t$ таких подынтервалов, и поэтому общее число квадратов пропорционально $N(\Delta t) \propto \Delta t^{-3/2}$. Тогда, в соответствии с определением фрактальной размерности, получим

$$d = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 1{,}5.$$

Таким образом, фрактальная размерность одномерного броуновского движения составляет 1,5, т.е. нечто среднее между размерностью линии и размерностью плоскости.

Броуновское движение, как и любой процесс с независимыми приращениями, есть марковский процесс. Это означает, что условная вероятность события $x(t_2)$ достигает определённого значения при данном значении $x(t_1)$, где $t_1 < t_2$, зависит только от t_1 и t_2. Эта вероятность не зависит от поведения $x(t)$, при $t < t_1$, то есть в процессе случайного блуждания каждый шаг делается без какой-либо информации о том, каким образом процесс достиг текущего значения.

В тех случаях, когда нужно описать случайные процессы с фрактальными размерностями, отличными от значения 1,5, применяют модель обобщённого броуновского движения, введённую Мандельбротом. Обобщённый броуновский процесс имеет нулевое среднее приращение и дисперсию приращений вида

$$< [x(t) - x(t_0)]^2 > = \sigma^2 |t - t_0|^{2H},$$

где H — параметр Херста, связанный с фрактальной размерностью графика реализации этого процесса d соотношением $H = 2 - d$. При $H = 1/2$ получаем классическую модель броуновского движения.

Фрактальная размерность обобщённого броуновского движения вычисляется по формуле:

$$d = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = 2 - H$$

Важная характеристика стохастических процессов (их часто называют шумами) — спектральные зависимости. Спектральные плотности мощности очень часто подчиняются степенным законам с постоянным показателем β: $S(f) \propto f^{-\beta}$, где f — частота. Для фрактальных процессов показатель β связан с параметром Херста соотношением: $\beta = 2H + 1$. При $\beta = 0$ наблюдается белый шум. Теперь, зная соотношения между β, d и H, можно сформулировать принципиальные различия в поведении хаотических временных рядов разного типа.

При $\beta = 0$ наблюдается процесс, который называется белым шумом или последовательностью независимых, распределённых по нормальному закону с постоянным средним и некоторой дисперсией случайных величин.

При $1 \leq \beta < 2 (0 \leq H < 0{,}5)$ процесс называется розовым шумом. В таких процессах существует «отрицательная память»: если в прошлом наблюдалось положительное приращение, то в будущем с высокой вероятностью будет наблюдаться отрицательное, и наоборот.

При $\beta = 2 (H = 0{,}5)$ временной ряд является броуновским процессом или коричневым шумом. Основное свойство этого процесса — отсутствие памяти: следующее приращение ряда не зависит от всех предыдущих.

При $2 < \beta \leq 3 (0{,}5 < H \leq 1)$ процесс называется чёрным шумом и обладает «положительной» памятью: если в прошлом наблюдалось положительное приращение, то в будущем с высокой вероятностью будет также наблюдаться положительное, и наоборот.

Большинство временных рядов, наблюдаемых в природе и науке, обычно можно отнести к одному из перечисленных выше классов. Так, коричневому шуму соответствует одномерное броуновское движение. Розовым шумам соответствуют временные ряды, наблюдаемые в процессах турбулентности. Чёрные шумы регистрируются в разливах рек, солнечной активности, статистике природных и техногенных катастроф.