ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ БАРЬЕРЫ НА ПУТЯХ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Валерий Николаевич Клепиков,
кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Институт изучения детства, семьи и воспитания» РАО, учитель математики и этики МБОУ СШ № 6 г. Обнинска, Klepikovvn@mail.ru

• боязнь математики • психологические барьеры • информационный резонанс • клиповое мышление • пластическое мышление • внутренние смыслы • метод пластического моделирования и интерпретации текстов • гуманитаризация математики

В последние годы особенно очевидным становится тот факт, что учащиеся нередко теряются или увязают в простейших казалось бы математических заданиях и ситуациях. Более того, школьники перестали читать учебники, так как не понимают логики изложения материала; неохотно рисуют геометрические чертежи, поскольку нужно более или менее виртуозно обращаться с циркулем и линейкой; тяготятся заниматься математическим моделированием, так как оно требует развитого абстрактного мышления и различных подходов; не спешат проводить исследовательскую работу, потому что она требует постановки проблемных вопросов и выдвижения реалистических гипотез и т.п.

Это говорит о том, что сознание современных школьников изменилось. Наши наблюдения показывают, что происходит *активизация пластического мышления детей*[1], которое постепенно вытесняет логическое мышление. Отчасти это происходит благодаря компьютерным технологиям, они во многом «думают» и «делают» за ребёнка, и в то же время активизируют их воображение. В этой связи психологи говорят о расширении контингента *детей-визуалов*, *о клиповом мышлении* детей, о повышающейся роли *образного мышления*. Поэтому при всех обозначенных негативных тенденциях последнего времени мы в своей работе опираемся на позитивные качества, которые обнаруживаются в сознании сегодняшних детей.

Обратим внимание, что современные учащиеся опираются в своих рассуждениях скорее не на абстрактные логические построения[2], а именно на ментальные образования (смысловые, образные, ассоциативные и т.п.), когда следующий знаниевый виток является насущно необходимым, близким внутреннему миру учащихся, даже если он на первых порах «прорастает» не совсем туда, куда нужно. Нам приходилось неоднократно наблюдать следующую ситуацию: то, что логично с точки зрения учителя, далеко не всегда логично с точки зрения учащегося[3]. И это нужно учитывать современному учителю в своей работе, если он хочет выступать в роли не диктатора и транслятора «абсолютно верных знаний», а терпеливого помощника, сопровождающего органичное развитие ребёнка в естественном для него направлении. При этом очень важно, чтобы ученик и педагог непрерывно формулировали уточняющие вопросы, так как известно, что верно поставленный вопрос уже наталкивает на конструктивный ответ.

Вспоминается и предупреждение родоначальника рационализма Рене Декарта о том, что логика и её определения – не высший суд ясности и истины. Ясность и истина

[1] **Клепиков В.Н.** Развитие пластического мышления школьников // Школьные технологии. – 2015. – № 1.

[2] Как известно, строгая логика не всегда убеждает, но иногда отпугивает своей безапелляционностью, даже некоторой агрессивностью.

[3] В одном из произведений Ф.М. Достоевского мы встречаемся со следующей интересной мыслью: «Покажите вы русскому школьнику карту звёздного неба, о которой он до тех пор не имел никакого понятия, и он завтра же возвратит вам эту карту исправленною».

покоятся на субъектном основании, а субъектные основания находятся в ментальных особенностях духовного мира человека. Другими словами, отчуждённая истина не имеет значимого влияния на внутренний мир человека, как бы мы её не обосновывали и не превозносили. Было бы слишком просто выработать на все времена ту или иную форму подачи нового материала, определяемую строгой системной последовательностью, тогда педагога можно было бы легко заменить компьютером, т.е. машиной.

Действительно, ну не успеваем мы в погоне за выполнением плана урока остановиться на «смачных», «вкусных», проблемных, личностно-значимых для детей моментах: тут пролетели мимо, может быть, вычурного, но самобытного способа решения, там проскочили мимо заторможенного, но чудесного прозрения. Пролетаем даже мимо того, что делать по большому счёту обязаны – интерпретировать условие задачи на разных математических языках. А главное – не успеваем позаботиться о формировании устойчивого позитивного психологического отношения к математическим заданиям, когда ученик, кропотливо проработавший материал на личностном ментальном уровне, перестаёт бояться математики. Так формируется и подтверждается широко распространённый миф о сухости математики.

Можно предположить, что почти в каждой математической теме для ребят существуют такие «**точки роста**», которые как бы стягивают и проблематизируют информацию и в круге которых наблюдается более интенсивная интеллектуальная жизнь. Подобные точки М.К. Мамардашвили назвал «точками интенсивности», В.С. Библер – «точками удивления», В.И. Загвязинский – «горячими точками», П.А. Флоренский – «средоточиями», А.В. Хуторской – «точками–проблемами», Г. Померанц – «узелками бытия», А.Н. Леонтьев – «смысловыми единицами». Расширяя смысловое значение точки до символа, можно говорить об «онтологической точке» (С.В. Гальперин), т.е. о точке, из которой «рождается мир» (новые понятия, ценности, смыслы и т.д.).

Несомненно, что каждый ребёнок имеет подобные точки роста, через которые он не имеет права проскочить, но должен их своевременно прожить. В истории математики такими точками роста были «проблема несоизмеримости», «задача на квадратуру круга», «метод исчерпывания», «метод координат», «векторный метод», «идея интегрирования», «23 проблемы Гильберта» и т.п. Все перечисленные точки роста нацеливали математиков на решение новых, более сложных проблем, и тем самым «заставляли» непрерывно развиваться.

В ходе объяснения нового материала нужно отвечать внутренним чаяниям детей, их возрастным особенностям и интуитивным вопрошаниям, конструктивно и нестандартно реагировать на повторяющиеся ошибки. Тем более, что некоторая индивидуальная смысловая ошибка очень часто, как магнит, вновь и вновь затягивает линию рассуждений ребёнка. И здесь чуткий педагог задаётся следующим вопросом: почему именно данный ложный путь привлекает учащегося? Явно не достаточно просто указать верный путь. Нужно тщательно поработать с ошибочными мыслями ребёнка и найти в них конструктивные моменты.

В этой связи не случайно великий писатель Г.К. Честертон предупреждал: «Привычные ошибки почти всегда верны. Почти всегда они нащупывают истину, неведомую тем, кто поправляет ошибающегося»[4]. Действительно, дети нередко «любят и лелеют» свои ошибки, не спешат с ними расставаться, ведь в эти ошибки вложено их «я». Поэтому важно идти не только в логике образовательного материала, но и в логике эволюции *внутренних смыслов* детей, которые нередко запутанны и не всегда приводят прямолинейным путём к верному результату.

И здесь нам на помощь приходят идеи развивающего обучения. Как известно, существенным признаком развивающего обучения является органичное для учащегося *порождение одной информации другой*. Именно на осмысленном погружении в материал настаивал и основоположник развивающего обучения В.В. Давыдов. Однажды он дал такую характеристику ученику, справившемуся с задачей, но внутренне не изменившемуся: «Себя, почему-то не справлявшегося с задачей, и себя, благодаря чему-то решившего задачу, он просто не

[4] **Честертон Г.К.** Вечный человек. – М., 1991. – С. 312.

заметил. Для задачи – никакого ущерба: она была решена. А для ученика?.. К экзамену школьник может прийти подготовленным. Но будет ли он готов жить в постоянно меняющемся мире, предполагающем умение постоянно менять себя?»[5] Казалось бы, ученик быстро решил новую задачу и очень хорошо. Но психолога насторожило то, что учащийся не заметил новообразования, нового духовно-интеллектуального приобретения. А значит, по его мысли, не произошло внутреннего движения, т.е. его развития.

Сделаем маленькое отступление… Как нам представляется, в данной ситуации существует и вторая «сторона медали»: ребёнок не заметил новообразования потому, что его просто и не возникло. Задача для него оказалась слишком простой. В этом случае виноват педагог, который не почувствовал границы между *зонами актуального и ближайшего развития ребёнка* и не смог подобрать ему задания «по силам», «на вырост». В таком случае учащийся не только не развивается, но и отчасти деградирует, так как у него создаётся впечатление, что он уже достиг окончательного результата (т.е. «потолка»).

Оказывается, производя те или иные содержательные преобразования при решении задачи, ученик может осмысленно не проживать и не переживать те трансформации, которые происходят внутри него самого. Задача решилась – и прекрасно! А те внутренние проблемы, которые преодолевались учащимся в переходе от незнания к знанию, от неумения к умению, так и остались им не замеченными. Ученик даже не успел осмыслить, что в его сознании совершилось маленькое открытие, поэтому он так и не узнал о своей личности ничего нового. Кстати, в данном контексте становится очевидным тот факт, что гораздо более существенным является *учение*, чем *обучение*, *самовоспитание*, чем *воспитание*, *саморазвитие*, чем *развитие*. Для ребёнка важнее то, что он самостоятельно преодолел, а не то, что он «перешагнул» или «пролетел», не заметив.

В.В. Давыдов поднял серьёзную проблему: может ли человек развиваться, если он не рефлектирует и не объективирует изменения в своём внутреннем мире? Более того, данное развитие он отмечает не по степени сложности решённых математических задач, а по изменениям во внутреннем мире учащегося. В этом мы солидарны с психологом: успешность ребёнка проявляется не только по количеству решённых задач повышенной сложности, но и по способности учащегося отмечать свой духовно-интеллектуальный рост.

Добавим, что школьники с ярко выраженной самобытностью часто не могут «переступить через себя», через свой внутренний опыт. Он им как бы «мешает». Важно то, что через решение какой-либо задачи он ещё и пытается понять себя самого, особенности своего мышления и сознания. Приходится констатировать, что одарённые дети – это не только те, которые от природы наделены математическими способностями, но и те, которые могут открывать посредством математики для себя новые смыслы, новые точки роста, т.е. преломлять материал через свой внутренний мир и тем самым его обогащать. Здесь математика посредством своего содержания и инструментария становится источником и двигателем личностного развития ребёнка. А для этого, повторимся, как ни странно, необходимо определённое «сопротивление» изучаемого материала.

Вспомним в этой связи Альберта Эйнштейна. Некоторые преподаватели и даже учёные мужи считали его туповатым, на что он нисколько не обижался. Маленького Альберта окружающие описывали как неразговорчивого, задумчивого, мечтательного мальчика, поздно научившегося говорить. Но именно его самобытный, «заторможенный взгляд», лучше – «заворожённый взгляд», на всё, что его окружало, помог ему стать великим учёным. Особенности своего восприятия он комментировал с помощью следующего образа: «Видишь ли, когда слепой жук ползёт по поверхности шара, он не замечает, что пройденный им путь изогнут, мне же посчастливилось заметить это». Так, наверное, он пытался намекнуть на значимость в его концепции так называемого искривлённого пространства, которое явно противоречит здравому смыслу.

Тем самым ошибки, о которых мы говорили, могут играть положительную роль, т.е. быть более конструктивными элементами

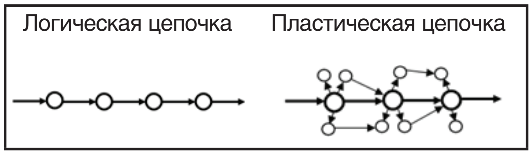
[5] **Давыдов В.В.** Теория развивающего обучения. – М., 1996. – С. 244.

мышления человека, чем результаты мышления «автоматом», когда он даже и не замечает, «как это случилось». Поэтому «сопротивление» образовательного материала для учащегося есть необходимое условие его развития. Опытный, проницательный педагог не настаивает на правильном варианте решения, а пытается с помощью наводящих вопросов вникнуть во внутренний мир ребёнка, «разрыхлить» проблемное поле его сознания, раскрыть ему его «точки опоры», «векторы развития», «точки роста». Другими словами, ошибки «нужны» не только слабым детям, но и сильным, более успешным!

В психологической литературе выделяют несколько определений понятия психологического барьера, но мы сформулируем своё, рабочее, которым пользуемся в своей повседневной практике. *Психологический барьер* – это совокупность прошлых знаний, которые в своих скрытых, неявных формах, смыслах, значениях (часто ассоциативно близких) резонируют, комбинируются, сопрягаются с настоящими знаниями и влияют на их усвоение и понимание. При этом субъект может об этом даже не подозревать, не осознавать, что же ему мешает, почему одна и та же ошибка возникает вновь и вновь.

В этой связи мы предлагаем использовать *метод пластического моделирования и интерпретации текстов*[6], который выстраивает материал таким образом, чтобы с возможными проблемами понимания столкнуться как можно быстрее, не дожидаясь их последующего случайного и неожиданного обнаружения. В ходе использования данного метода моделируются различные текстовые ситуации, которые рассматривают первичное знание в различных комбинациях, модусах, сравнениях и сопряжениях. Инструментарием метода являются непротиворечивые цепочки суждений, оптимальные математические приёмы, использование малых чисел, наглядные рисунки (желательно, чтобы они были динамическими, «живыми»), обратные и ассоциативно близкие «запутывающие», софистические примеры и т.п.

[6] **Клепиков В.Н.** Метод пластического моделирования и интерпретации текстов // Школьные технологии. – 2013. – № 3. – С. 101.



Обратим внимание, что в «пластической цепочке» познание осуществляется не в строгой «линейной» логике педагога, а, по сути, педагог идёт одновременно впереди и с ребёнком вместе, учитывая его личностные точки роста, его внутренние смыслы. Конечно, какие-то субъективные смыслы остаются невостребованными, но существенные он задействует, от них отталкивается и использует для продвижения вперёд. Как мы считаем, именно такое познание и является в подлинном смысле *развивающим*.

Необходимость в создании метода пластического моделирования и интерпретации текстов вызрела в ходе реальных уроков математики, на которых иногда возникали бурные дискуссии по толкованию той или иной задачи. На первых порах были сомнения, а нужно ли всё усложнять, давая различные интерпретации имеющимся и моделируемым текстам, но всё разрешилось, когда мы стали изучать утверждения («ложь или истина», «верно или неверно») в задачах № 13 из сборников для подготовки к ОГЭ для 9 класса. Оказалось, чтобы понять предлагаемое утверждение, нужно не только нечто вспомнить, но порассуждать, провести аналогии, смоделировать различные ситуации и т.п.

Приведём лишь некоторые из подобных утверждений по отношению к треугольнику. Верно ли, что: «один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов», «два угла любого треугольника острые», «сумма углов в тупоугольном треугольнике больше, чем в остроугольном треугольнике». Очевидно, что для правильного ответа нужно рассмотреть и проинтерпретировать угловые меры различных треугольников.

Ещё один пример. Наверное, все учителя математики постоянно сталкиваются с той ситуацией, когда дети путают признаки равенства треугольников и признаки подобия треугольников. Это связано с тем, что у этих признаков много общего (равенство треугольников – частный случай подобия треугольников). Происходит информационный резонанс. И здесь, если мы вместе с детьми хотим осмыслить ситуацию, а не просто вызубрить эти признаки, без метода пластического моделирования и интерпретации текстов явно не обойтись.

Отметим, что современный ученик должен включать своё критическое мышление и быть готовым к решению не только однозначных задач, но и неоднозначных или двусмысленных, которые чаще всего и встречаются в реальной жизни. Можно даже сказать, что тотальное превалирование однозначных задач уходит в прошлое. Недаром в примерах ОГЭ для 9 класса встречаются задачи, в которых специально содержатся «лишние» данные, которые в ходе осмысления учащийся должен «отсеять» или всё-таки («окольно») где-то применить.

Разберём следующую лаконичную занимательную задачу на шаблонность мышления. «Горело семь электроламп. Одну выключили. Сколько электроламп осталось?». Тут же хочется сказать, что шесть. Но оказывается у данной задачи не только чисто математический, но ещё и фактический подтекст. И эти два или даже три подтекста учащийся должен обнаружить и задать уточняющие вопросы. Например, такие: «Какие лампы считать: только горящие или все, которые есть?», «А были ли в данной комнате ещё выключенные электролампы?». А можно даже выйти и на философский вопрос: «Считать ли в задаче существующей потухшую лампу или, как только она перестала выполнять свою основную функцию, то она уже как бы и не существует?». Так, моделируя различные вопросы и давая уточняющие формулировки задачи, учащиеся постепенно «докапываются» до истины.

Необходимо добавить, что в последнее время на уроках математики всё более и более востребован тот подход, когда необходимо составить и решить задачу с меняющимся содержанием условия или с несформулированным, или неточно сформулированным вопросом; проанализировать, как изменяется решение при изменении части условия или вопроса. Особенно это важно, когда в урок включаются исследовательские и проектные компоненты.

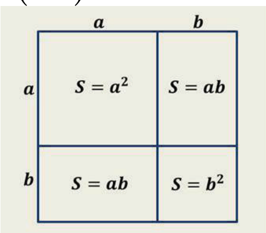
В этой связи представляет интерес технология укрупнённых дидактических единиц (УДЕ) П.М. Эрдниева, в ходе реализации которой обучение проходит в виде процесса постепенного укрупнения упражнения, подаваемого в форме открытой задачи, т.е. такой, которая позволяет постепенно наращивать всё новые задания и смыслы на базе исходной «затравки». При этом происходит одновременное функционирование всех кодов учебной информации, которые переходят друг в друга: слова, рисунка, модели, символа, числа. Тем самым обеспечивается и совместное функционирование лево- и правополушарного механизмов переработки математической информации[7].

Каждая ошибка подразумевает, что существует некий *психологический барьер*, который препятствует её осознанию и пониманию. Если попробовать дать некую классификацию, то существует несколько психологических барьеров, мешающих полноценному усвоению математических знаний. Условно назовём их барьерами «шаблонного мышления», «здравого смысла», «интуитивно ясной идеи», «ложной ассоциации», «неожиданного парадокса». Приведём конкретные примеры… Но предварительно отметим – если в истории математики на устранение некоего психологического барьера уходили годы или даже десятки лет, то в сознании современного школьника этот барьер должен быть устранён в течение нескольких минут или часов (уроков).

«Ложная ассоциация». Каждый учитель математики знает, как непросто бывает усвоить некоторым ребятам тот факт, что в общей форме квадрат суммы не равен сумме квадратов: $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$. Из истории известно, что этот момент не понимал известный французский писатель Ж.Ж. Руссо. И только когда ему сделали подтверждающий и основательно выполненный наглядный рисунок (на базе «геометрической алгебры»), составленный из соответствующих прямоугольников, он всё понял. Откуда это устойчивое затруднение? Как представляется, отчасти это связано с формулой квадрата произведения, где мы обнаруживаем близкую конструкцию:

[7] **Клепиков В.Н.** Роль креативно-опорных сигналов на уроках математики в школе // Школьные технологии. – 2014. – № 2.

$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.



$$S_{\square} = (a+b)^2$$

$$S_{\square} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Далее для осмысления данной ситуации необходимо взять конкретные малые натуральные числа и подставить в формулу: $(3+2)^2 \neq 3^2 + 2^2$, так как $25 \neq 13$, значит, всё-таки $(3+2)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2$. Но в любом случае нужно провести определённую «пластическую процедуру», чтобы удалить возникший барьер.

Другие учащиеся проводят и такую ложную аналогию: если верна теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, то верно и равенство $a + b = c$. На самом же деле в треугольнике сумма величин любых двух сторон больше величины третьей стороны, т.е. $a + b > c$ (тема «Неравенство треугольника»). Чтобы избежать таких нелепостей, важно рассмотреть одновременно все возможные равенства и неравенства, связанные с треугольником, в единой связке: $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 > c^2$, $a^2 + b^2 < c^2$ и $a + b = c$, $a + b < c$, $a + b > c$. И в ходе совместных интерпретаций, поддерживаемых конкретными вычислительными операциями и пояснительными рисунками, удаётся выяснить, какие формулы для треугольника неверные или лишние.

«Интуитивно ясная идея». Во многих случаях современные дети опираются на интуитивно понятные им субъективные идеи. Однако в математике это слишком «скользкий подход». Например, некоторые из них никак не поймут, что при умножении двух правильных обыкновенных дробей результат уменьшается: $^1/_2 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_4$, или при возведении $^1/_2$ во вторую степень получается меньшее число – $^1/_4$. Хотя этому факту в XV веке удивлялся и итальянский математик Лука Пачоли в своём сочинении «Сумма»: «Разве не содержится противоречие в том, что дроби, будучи умноженными друг на друга, дают уменьшение; тогда как умножение должно означать увеличение». Или: разве естественно говорить, что 3 больше 6 в $^1/_2$ раза!?

Другой великий математик К. Гаусс как-то сетовал даже на то, что дроби – это уже нечто противоестественное: «Насколько не опасаются вводить в общую арифметику дробные числа, хотя существует так много пересчитываемых вещей, в применении к которым дробь не имеет никакого смысла…». Действительно, ведь дробить можно далеко не все предметы и вещи, существующие в мире. Разве можно, например, «дробить» самого человека, его чувства?

Здесь важен тот момент, что *единицу* человечество стало рассматривать на каком-то определённом этапе своей истории не только как обычное число, но и символически – как нечто *целое*. Поэтому возникла идея «основных дробей», или «аликвотных дробей», т.е. таких дробей, которые получаются при делении произвольного целого, т.е. единицы на части. В математике этот факт используется при решении многих задач (на проценты, на движение, на совместную работу и т.п.).

Что касается правильных обыкновенных дробей, то интересен тот факт, что самые употребляемые у человечества дроби $^1/_2$ (половина), $^1/_3$ (треть), $^1/_4$ (четверть), $^3/_4$ (три четверти) произошли не в результате деления натуральных чисел друг на друга, не как отношение, а точно так же как и натуральные числа, сразу, как нечто единое, как очевидный факт. Например, римские дроби вначале носили конкретный (весовой) характер, но с течением времени эти дроби стали употребляться в качестве абстрактных (отвлечённых) дробей. В истории математики констатируется: «дроби у народов Китая появились почти одновременно с целыми числами»; первыми дробями были $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$ называвшиеся «половиной», «малой половиной» и «большой половиной». Интересно, что на Руси $^1/_5$ – это пятина, $^1/_6$ – полтреть, $^1/_7$ – седьмина[8].

В этой связи становится понятным, почему Платон, говоря о пропорции, имеет в виду именно три числа, а не четыре: «Однако два предмета (числа) сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь.

[8] Энциклопедия для детей. – Т. 11. Математика. – М., 2003.

Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое. И задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция…»[9]. А пропорция – это и есть гармоническое соотношение «целого», «доли» и «части». Таким образом, например, можно составить следующую пропорцию: 4 : 8 = ½.

Интересно, что на необходимость различения понятий «часть» и «доля», которые не различаются во многих учебниках, педагоги вышли не так давно. И этому способствовали именно детские затруднения и вопросы, когда они пытались выяснить, чем отличаются «часть» и «доля». Вот одно из детских прозрений: «доля, в отличие от части, всегда помнит о целом».

Удивительно, но сам Г.В. Лейбниц, кстати, один из создателей дифференциального исчисления, попался в ловушку «интуитивно ясных идей», когда формулу для производной произведения двух функций однажды рассмотрел как произведение производных. На самом деле, производная произведения двух функций равна производной первой функции на вторую плюс первая функция, умноженная на производную второй. Получается так, что от ошибки «интуитивно ясных идей» не застрахованы даже великие математики! Хотя, что тут такого – они ведь тоже люди, а не роботы.

Можно привести ещё одну задачу, которую многие дети решают быстро и, как правило, неправильно. «Бутылка с пробкой стоят 12 рублей. Бутылка дороже пробки на 10 рублей. Сколько стоит пробка?» Ребята часто тут же дают ответ: 2 рубля. Однако на самом деле правильный ответ: 1 рубль. Применяя метод пластического моделирования и интерпретации текстов, делаем следующее: придумываем задачу, где ответом будет 2 рубля (Бутылка с пробкой стоят 12 рублей. Бутылка стоит 10 рублей. Сколько стоит пробка?), сравниваем эти задачи, рисуем картинки, составляем уравнение или систему уравнений, перепроверяем полученный результат.

Все эти примеры показывают, что далеко не всё, что кажется интуитивно ясным – верно. Математика обладает *собственным языком и собственной логикой*, которые нередко отличаются от «человеческой логики» и которые необходимо знать, изучать и уважать, чтобы не оказаться в плену различных заблуждений.

«Неожиданный парадокс». Первый неожиданный парадокс, с которым могут встретиться дети – это результат от умножения отрицательных чисел: при умножении отрицательных чисел получается положительное число. Второй парадокс. Как известно, большее, делённое на меньшее, не может быть равно меньшему, делённому на большее. Но в математике существует и другая ситуация, с которой сталкиваются ученики: $+1 : (-1) = -1 : (+1)$, в результате $-1 = -1$. Получается так, что большее, делённое на меньшее, равно меньшему, делённому на большее. В этой связи математик Л. Эйлер писал: «Здесь нет противоречия, но только парадокс. Не слова, однако, составляют пропорцию, а математическое понятие, которое расширяется».

Для пояснения добавим, что числа нельзя трактовать только в связи с понятием отношения скалярных величин и считать, что отрицательное число означает только вычитаемую абсолютную величину. Решение этой проблемы отчасти произошло благодаря созданию теории комплексного числа, которая дала естественное объяснение законов и правил действий с отрицательными числами.

Другим парадоксом считается тот случай, когда часть равна целому. Например, натуральные числа и простые числа: и те, и другие уходят в бесконечность, но простые являются частью натурального ряда. Возникает парадокс: что «бесконечнее» — прямая или луч? Как представляется, учитель должен специально знакомить учащихся с математическими парадоксами, понимая, что реальная жизнь во многих своих аспектах не только противоречива, но и парадоксальна.

Напомним, что ещё в конце прошлого века известный русский методист С.И. Шохор-Троцкий выступил как изобретатель нового метода – «*метода целесообразных задач*». Он говорил, что обучение должно проходить не через усвоение учебника или объясне-

[9] **Платон**. Собр. соч. в 4-х т. – М.: Мысль, 1990–1994. – Т.3. – С. 435.

ние учителя, а при помощи более или менее самостоятельной работы ученика над искусно подобранными заданиями[10]. Метод пластического моделирования и интерпретации текстов опирается на систему целесообразных задач. В такую систему «искусно подобранных задач» необходимо включать противоречивые, софистические и парадоксальные задачи.

Метод пластического моделирования и интерпретации текстов позволяет к различным математическим текстам подходить более детально, так как благодаря им можно встретиться с глубинными и неординарными смыслами. Именно непрерывная «раскрутка» деталей не даёт педагогу остановиться в своём развитии, потерять профессиональную чуткость. По словам замечательного педагога Е.Н. Ильина: «В любой ткани узелок – брак, в художественной – открытие, находка. Мышление открытиями увлекает. Если не закопаться в частностях, а дойти до целого, появляется потребность в обратном движении – к детали, чтобы проверить, так ли, к тому ли и от того ли шёл. Обратное от поступательного – это уже глубина! Разумеется, не всякая деталь вырастает до символа, вбирая целое, раскрываясь в нём и раскрывая его, но всякая – достойна внимания»[11].

Мы уверены, что к математическому материалу можно и нужно подходить точно так же, как к художественному тексту. Только с математическим материалом нужно дополнительно поработать: наполнить его историческими, культурологическими, философскими и личностными смыслами. И эта возможность возросла многократно с широчайшим внедрением информационно-коммуникационных и цифровых технологий. Наверное, недаром известный математик И.Ф. Шарыгин как-то заметил: «Клетка геометрии – треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная».

В заключение отметим, что преподавание современной математики мы связываем с идеей *гуманитаризации образования*, которая подразумевает разработку не абстрактных или утилитарных для школьника проблем по типу «математика ради математики», «математика ради сдачи ОГЭ», «математика для повседневного счёта» и т.п., а тех, которые средствами математики (образы, символы, знаки и т.д.) говорят что-то о его внутреннем мире, формируют, расширяют и углубляют этот мир. За тысячелетия учёные-математики создали глубокий язык, посредством которого человечество аккумулирует, актуализирует и генерирует внутренние процессы развития субъекта. И в нашей работе этому помогает метод пластического моделирования и интерпретации текстов, который, кстати, можно применять и на других предметах школьного цикла. ❑

[10] **Шохор-Троцкий С.И.** Геометрия на задачах: Книга для учителей. – М., 1908.

[11] Педагогический поиск / состав. И.Н. Баженова. – М., 1987. – С. 210.