МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ КАК КОМПОНЕНТ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Сергей Рувимович Когаловский*, профессор кафедры математики, физики и методики обучения, кандидат физико-математических наук, профессор, Шуйский филиал ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный университет»*

• обучение математике • когнитивная природа математики • эпистемологическая природа математики • метатеоретическое моделирование • уровни идеализации • идеальная форма поисково-исследовательской деятельности

Едва ли кто-либо из специалистов в области образования не согласится с тем, что обучение математике должно: 1) сообразовываться с законами психологии познания, 2) нести освоение математических знаний, умений и навыков, необходимых для успешной социализации в современном социуме, и 3) отвечать природе математики (и с тем, что аналогичным требованиям должно следовать обучение всякому другому учебному предмету). Едва ли кто-либо из них не согласится с тем, что при всех достижениях, относящихся к первым двум требованиям, исследования в этих направлениях необходимо развивать. Но немного найдется тех, кто не сочтет третье требование банальным, не заслуживающим специальных исследований. Не является ли, однако, эта банальность лишь кажущейся? Не скрывается ли за нею недостаточная проясненность той особой роли, какую школьный курс математики должен играть в системе общего образования, и средств, необходимых для полнокровной её реализации?

Сформулируем вопрос несколько иначе: в какой мере сегодняшние стандарты и соответствующие им программы школьного курса математики отвечают той роли, которую курс математики должен играть в системе общего образования?

Многопоколенный опыт использования термина «математика», включенность в его значение широкого разнообразия предметного содержания и, как следствие, включенность множества сопутствующих ассоциаций, «нарастание» на нем разнонаправленных концептуальных образов – всё это делает весьма непростым постижение природы математики. Каким бы ни было (разумное) понимание того, что такое математика, за его пределами остается представляемый этим термином и продолжающий развиваться богатый когнитивный потенциал, пребывающий в форме «коллективного бессознательного» научно-педагогического сообщества и ждущий вызревания средств его осознания, продуктивного рационального выражения и реализации. Однако проблема модернизации математического образования, проблема его должного сообразования с гуманитарными ценностями и потребностями развивающегося социума требуют такого прояснения когнитивной и эпистемологической природы математики, какое могло бы служить эффективным мета-ориентировочным средством при исследовании этих проблем.

Представители педагогической общественности единодушны в том, что особая роль математического образования состоит в логическом развитии учащихся, или, лучше сказать, в развитии логичности их мышления. Они признают, что логичность мышления развивает и обучение физике, биологии, языкам, но полагают, что если при обучении этим предметам развитие логичности мышления является лишь эпифеноменом обучения, то обучение математике направлено на это прямым образом, непосредственно. Но верно ли последнее?

Рассмотрим следующий пример[1], связанный с первыми шагами анализа понятия предела числовой последовательности: какой бы длинный начальный кусок последовательности мы ни взяли и каким бы новым куском, длинным или коротким, его ни заменили, полученная последова-

[1] Пример приведен в нашей статье «Понятие модели и математика. Часть 2» в ШТ №5, 2013.

тельность сходится или расходится вместе с данной, и если эти последовательности сходятся, то они имеют один и тот же предел. Это совершенно новая для учащихся ситуация, выступающая как парадоксальная: выходит, что свойство последовательности быть сходящейся не зависит ни от какого её члена, то есть что оно подобно улыбке чеширского кота (как бы) не связано с её «плотью»! Таким образом, уже начальные шаги в изучении понятия предела последовательности предполагают новый строй мышления, новую логику, приобщение к которой осуществимо только через погружение в саму математическую деятельность. Рассмотренная ситуация демонстрирует отнюдь не уникальный случай, когда тот или иной логический план выступает не как изначально наличествующее средство математической деятельности, а как её продукт, несущий средства восхождения на новый её уровень.

А теперь рассмотрим следующие элементарные задачи: а) *доказать, что при любом значении параметра* a *существует такое значение параметра* b, *при котором уравнение* $x^3+ax^2+bx=0$ *имеет единственный корень*; 2) *узнать, верно ли, что при любом значении параметра* b *существует такое значение параметра* a, *при котором это уравнение имеет единственный корень*; 3) *узнать, имеется ли такое значение* b, *что при любом значении* a *это уравнение имеет единственный корень.*

Высказывания, являющиеся предметами этих задач, выразимы такими предваренными формулами узкого исчисления предикатов, в которые входят и кванторы общности, и квантор существования. Заметим также, что определение понятия предела последовательности выразимо предваренной формулой с двумя переменами кванторов. Конечно, приобщение учащихся к собственно логическому плану, к тем или иным логическим формам, к явно выражаемым логическим законам повышает их логическую культуру и помогает приобщению к ситуациям, за которыми стоят новые для них более сложные логические формы. А приобщение к таким ситуациям повышает уровень логичности их мышления. Освоение же собственно логического плана, в частности, той или иной логической формы происходит тогда, когда сама эта форма становится предметом изучения и посредством изучения обретает «самостояние». Но и такие исследования нуждаются в обращениях к ситуациям, представляющим эту логическую форму. Аналогичное справедливо в отношении любых метапредметных форм.

Освоение ситуаций, подобных описанным, осуществляется и независимо от того, осознают ли учащиеся стоящие за этими ситуациями логические формы как таковые, подобно тому, как живой язык осваивается без обращения к его грамматике. И подобно тому, как для достижения языковой культуры принципиально недостаточно грамматики (осваиваемого языка), для достижения того уровня логичности мышления, какой необходим для успешного освоения курса математики, принципиально недостаточно обучения собственно логике, например, в том духе, в каком обучают логике будущих учителей. К тому же нередко ими изучается единственно классическая логика, тогда как даже элементарные уровни математической деятельности используют далеко не только классическую логику. Так, в процессе открытия школьником доказательства той или иной теоремы используются разные логики: если само искомое доказательство использует классическую логику, то логика его поиска использует и интуиционистскую логику, а логика его проверки – конструктивную логику. Да ведь и в самом процессе изучения классической логики неосознанно используются разные логики. Математическая деятельность не просто поли-логична, но полилогична как сопровождаемая активными взаимодействиями разных логик, их полилогами. Представляется, что поли-логичность мышления, присущая, конечно, не только математической деятельности, но характерная для нее как для деятельности многомерной, должна стать особым предметом исследований и не только в области методики обучения математике, но и в области общей дидактики.

При обучении математике формированию и развитию логичности мышления учащихся способствует не столько обучение, направленное прямым, непосредственным образом на собственно логическое их развитие, сколько многомерная математическая деятельность, использующая широкое многообразие форм и уровней мышления[2].

Аналогичное как будто верно в отношении развития логичности мышления учащихся при их обучении другим учебным предметам. Но тогда каковы же те особые продуктивные средства для этого, которые несомы обучением математике? Математическая деятельность даже элементарного уровня как никакая другая связана с обращениями к ситуациям, за которыми стоит широкое многообразие логических форм, широкое многообразие разных логик и их взаимодействий. Не менее важно и то, что *доказательства* играют в ней особо важную роль. Признание этого приводит к вопросу о том, как должно быть построено такое обучение математике, которое несло бы возможность полнокровной реализации заложенного в ней потенциала развития логичности мышления и при котором логика выступала бы и как носитель креативного начала.

Но каков этот потенциал и каковы продуктивные средства его реализации? При всей чрезвычайной важности, при всей необходимости логического развития оно не тождественно интеллектуальному развитию, оно является только одним из его компонентов. И потому более правомерно вопрос о средствах логического развития учащихся ставить и исследовать в контексте постановки и исследования вопроса о средствах интеллектуального развития. Ведь речь должна идти об общем логическом развитии как о компоненте общего интеллектуального развития, что обеспечивается взаимодействиями развивающихся компонентов интеллекта, их взаимоСОдействиями.

Стержневым началом общего интеллектуального развития является развитие способностей к поисково-исследовательской деятельности. Общее образование должно быть направлено на приобщение учащихся *к общим формам* и *общим способам* деятельности[3] как способу человеческого существования, состоящего в активном изменении окружающего мира и преобразовании человеком самого себя. А поисково-исследовательская деятельность является ведущим компонентом всякой деятельности. Общепризнана особая роль школьного курса математики в приобщении учащихся к её общим формам и способам. Но каким же образом, посредством каких механизмов решение школьных математических задач, типология которых сравнительно невелика, осуществимо общее интеллектуальное развитие учащихся, по крайней мере, первичное их приобщение к общим формам и способам поисково-исследовательской деятельности? Ни в коей мере не принижая значения вошедших в учебный обиход задач и других учебных средств, заметим всё же, что обращаясь к ним, учащийся развивается как каменщик, но не как архитектор своего интеллекта[4]. Какие же средства, какие направления и формы учебной *деятельности* необходимы для преображения каменщика в архитектора? Достижимо ли такое преображение посредством освоения и развития того или иного комплекса учебных *действий* или для этого требуется приобщение к определенным направлениям, формам и способам математической *деятельности* как многоаспектного и многоуровневого целого? И не естественно ли искать ответ на этот вопрос как ответ на вопрос о когнитивной и эпистемологической природе математики?

Последние десятилетия отмечены значительными успехами в деле совершенствования содержания и методов обучения математике и в реализации результатов этих исследований. Но при всем том едва ли удастся в необозримом море работ, посвященных проблемам математического образования, найти хоть одну такую, где исследуемая в ней проблема не декларативным образом, а по существу связывалась бы с необходимостью прояснения природы математики. Может быть, это говорит о том, что

[2] Но подобно тому, как по достижении школьником определенного уровня языковой культуры обращение к грамматике становится важным средством восхождения на более высокий её уровень, по достижении им определенного уровня освоения математической деятельности (а значит, и достижения соответствующего ему уровня логичности мышления) становится продуктивным обращение к собственно логическому плану (как и переход от изучения «наивной» геометрии к аксиоматической геометрии).

[3] Это обосновывается в монографии А.В. Боровских и Н.Х.Розова «Деятельностные принципы в педагогике». – М.: МАКС пресс, 2010.

[4] Конечно, должно учитывать и то, что, например, нестандартные моменты в решениях некоторых задач могут рождать метаобразы и метапредставления, погружающиеся в долговременную память учащихся и становящиеся базой для открытия ими приемов и методов решения задач нового характера. И это способствует развитию учащихся, но только как каменщиков своего интеллекта. Для дорастания их до роли архитекторов своего интеллекта необходимы и иные средства.

решение сегодняшних проблем математического образования не нуждается в таком прояснении? Может быть, правы те наши ведущие специалисты в области методики математики, которые утверждают, что методика математики – это *самодостаточная* наука, что она не нуждается ни в помощи психологии, ни в помощи когнитивистики, ни в помощи эпистемологии?

Представляется, однако, что прояснение природы математики – это тот «камень, который презрели строители» и который должен стать «главою угла». Оно не достижимо, если его искать на предметном уровне, так как природа математики метапредметна. Будем его искать как прояснение когнитивной и эпистемологической природы математики.

* * *

Согласно Ж. Пиаже, знания не являются результатом простой регистрации наблюдений. Процесс познания невозможен без структурации, осуществляемой благодаря активности субъекта. Знания о вещах формируются как их *модели*. А значит, предмет познавательной деятельности, предмет всякой деятельности, не сам по себе, но вместе с ним и её субъект со своим инструментарием должны рассматриваться как образующие единую систему, развивающуюся вместе со своими компонентами. И потому *субъектный план* должен играть не вторичную, а ведущую роль в исследованиях, посвященных обсуждаемому кругу вопросов.

Эффективность модели исследуемого объекта достигается направленностью моделирования на исследование не столько этого объекта «самого по себе», сколько действий с ним, способов его исследования, того контекста, в рамках которого осуществляется исследование. Моделирование несет в себе обращенность к метапредметному плану и тем ведет к развитию механизмов понимания. Механизмы метапредметной деятельности и сами являются такими механизмами. Метапредметный план – зримое проявление *субъектного* плана.

Решая свои внутренние задачи и тем самым как бы уходя от собственных истоков, от содержательного плана, от первоначальных целей, математика именно посредством этого восходит к своим глубинным корням, преображает их в свои внутренние «средства производства», превращающиеся в средства преображения самой поисково-исследовательской деятельности, в средства развития её методологии, а в результате – и в средство развития её прикладных возможностей. Такие процессы осуществляются в форме метапредметной деятельности[5].

«*Самой природе математики присуща двойственность… Эту двойственность необходимо отчётливо сознавать… и учитывать при размышлениях о природе интеллектуальной деятельности в области математики. Двоякий лик – подлинное лицо математики*» – писал Дж. фон Нейман[6]. Какова же природа того лика математики, который предстает как чистая математика, развивающаяся в направлениях, «*имеющих всё более отдалённое отношение к эмпирическим данным*»? Только ли произведениями интеллектуального искусства являются результаты чистой математики, только ли в этом их ценность?

Исторические процессы становления, укоренения и развития фундаментальных математических понятий являются процессами восхождения от неразвитого идеального к развитому идеальному. Они образуют несущий каркас процесса развития математики. Анализ этих процессов несет дальнейшее прояснение природы математики, её существа. Он показывает, что математика – это метапредметное моделирование, то есть такое, что моделями исследуемых объектов являются объекты метапредметного уровня по отношению к ним. Точнее говоря, анализ показывает, что *математика – это развивающиеся концептуальный аппарат (а значит, и язык, и логика) и «технические» средства метапредметного моделирования и его реализации.* Этим проясняется природа математики, её существо и характер её связей с философией.

Заметим, однако, что и философия может быть охарактеризована как концептуальный аппарат и «технические» средства метапредметного моделирования. То же можно сказать, например, о такой её области, как эпистемология. И это свидетельствует

[5] См. нашу статью «Место и роль метапредметной деятельности в обучении математике» в ШТ №3, 2014.

[6] *Нейман Дж. фон.* Математик // Природа. 1983. № 2. С. 88-95.

о необходимости дальнейших продвижений в прояснении существа математики.

Такому продвижению помогает обращение к следующей важной эпистемологической стороне дела: математическое моделирование объектов изучения как естественных, так и гуманитарных наук осуществляется обычно посредством трехуровневых идеализаций. Первый уровень состоит в формировании идеального образа, идеальной модели исследуемого объекта «самого по себе». Идеальный газ, абсолютно твердое тело, материальная точка – примеры таких идеализаций. Второй уровень – погружение рассмотрения идеального объекта в идеальный мир, в идеальный контекст. Например, в классической физике – это погружение в пространственно-временной континуум. Осуществление второго уровня идеализации открывает возможность построения математической модели и её использования как идеализации третьего уровня. Такая идеализация – это *использование идеальных способов исследования идеального объекта в рамках идеального мира*. Такая идеализация делает исключительно важной роль формально-логических средств в математической деятельности (дающую повод полагать, что математика – это логика).

Моделируемый объект при таких идеализациях рассматривается не сам по себе, а в единстве с «миром», в который он погружен, в единстве с контекстом, в который погружено его рассмотрение, что часто не осознается. И сама его модель, то есть его идеальный образ, тоже рассматривается в рамках подходящего контекста, вместе с ним, что тоже часто не осознается.

Математические понятия, математические методы формируются и в прикладных рассмотрениях, но в таких рассмотрениях они фигурируют преимущественно как *средства* решения тех или иных задач. В теоретических же рассмотрениях они становятся *предметом изучения*, а это представляет собой принципиально иной тип деятельности. Такая деятельность не может не быть направленной на восхождения на метапредметные уровни.

В отличие от математического моделирования (в привычном понимании) при моделировании в математике (осуществляемом при исследовании её внутренних вопросов) и сами моделируемые объекты имеют идеальную природу. Это делает более прозрачным деятельный характер строящихся моделей. Это делает более прозрачной работу когнитивных механизмов, участвующих в процессах моделирования, и несет б льшие возможности усмотрения за спецификой процессов моделирования в математике, сильнее говоря, в самой этой специфике, общих механизмов, общих закономерностей, присущих поисково-исследовательской деятельности, возможности усмотрения её продуктивных форм. Это несет возможности лучшего постижения процессов формирования и развития орудий и «средств производства» самой математической деятельности и математического моделирования. Это несет возможность постижения природы той «двойственности» математики, о которой говорил фон Нейман.

Реализации этой возможности способствует анализ исторических процессов восхождений от интуитивных представлений, от протопонятий, или житейских понятий (Л. С. Выготский), к строгим математическим понятиям. В особой степени это относится к процессам становления фундаментальных математических понятий. Такие процессы, являющиеся процессами восхождения *от неразвитого идеального к развитому идеальному*, близки процессам математического моделирования, хоть и имеют существенно иную направленность. Анализ таких процессов и процессов математического моделирования (и их продуктов), их сопоставление способствуют дальнейшему прояснению природы математики, её существа, природы её эффективности.

Такие процессы, как и процессы математического моделирования, сопровождаются трехуровневыми идеализациями. Таковы, например, процессы формирования (и развития) первичных понятий математического анализа, отправлявшихся от их интуитивных прообразов и осуществлявшихся в рамках процесса формирования математического анализа на строгих основаниях. Если формирование самих этих понятий посредством восхождения к определениям их как строгих понятий (то есть к определениям, выражаемым на языке исчисления предикатов той или иной ступени) является первым уровнем идеализации, то погружение их рассмотрения в тот или иной теоретико-множественный мир, в ту или иную аксиоматическую теорию множеств, является вторым уровнем. Такое погружение несет и необходимые языковые средства, и идеальные орудия исследования, и обоснования его результатов (задаваемые аксиомами теоретико-множественного мира, которые определяют одновременно границы возможностей этих орудийных средств). Так что в описываемых процессах все три уровня идеализации осуществляются вместе и одновременно. Более того, второй и третий уровни идеализации в них обычно совпадают.

Особо отметим такое универсальное идеальное орудие математики, как принцип потенциальной осуществимости.

Первые два уровня идеализации используются во всякой научной деятельности (в том числе и в «сугубо» экспериментальных науках). И именно *использование идеализации третьего уровня является характеристической особенностью математики и её приложений.* Такая идеализация приводит к особой роли формально-логических средств в математике. Идеализации такого рода не могут не быть важным предметом методики обучения математике.

Уже первые два уровня идеализации несут восхождение на метапредметный уровень поисково-исследовательской деятельности, так что всякая наука характеризуется метапредметной деятельностью. Присущий приложениям математики третий уровень идеализации создает качественно новую ситуацию: он несет направленность не просто на более высокие уровни метапредметной деятельности, а на использование *орудий, которые предоставляют идеальные способы исследования идеальных объектов в рамках идеальных миров,* являющихся эффективными мета-моделями орудий поисково-исследовательской деятельности. В этом смысле он делает возможным восхождение на уровень *метатеоретической деятельности.*

Особенность «чистой» математики, зримо проявляющаяся в процессах становления фундаментальных понятий математики, состоит в том, что идеализация первого уровня направлена на сами орудия математической деятельности. В отличие от типичных задач, связанных с приложениями математики, задачи формирования математических понятий, долженствующих играть в математической деятельности многофункциональные стратегические роли, отличаются многомерностью и многоуровневостью. Они имеют существенно иной характер и существенно иные масштабы. Не случайно фундаментальные математические понятия – это продукт многопоколенной научной деятельности.

Третий уровень идеализации в таких процессах, сплавленный с первым и вторым, состоит *в развитии идеальных способов исследования идеальных объектов в рамках идеальных миров, в формировании и развитии их орудий*[7] *и «средств производства» таких орудий.* В этом существо «чистой» математики как того лика математики, который развивается в направлениях, «*имеющих всё более отдалённое отношение к эмпирическим данным*». «Чистая» математика, формирующая и развивающая орудия метатеоретической деятельности, имеет мета-метатеоретический уровень.

«Двойственность», присущая природе математики, её «двоякий лик» – это взаимодействия открывательской и изобретательской деятельностей, это взаимодействия исследовательской деятельности и деятельности, направленной на формирование её орудий, это то, что ведет к наращиванию потенции её дальнейшего развития, при этом сохраняя и углубляя её единство[8].

Формирование, использование и развитие идеальных орудий, идеальных способов ис-

[7] Идеальные миры, в которые погружаются исследования, несут в себе, большей частью в скрытой форме, такие орудия и границы их возможностей.

[8] Более правомерно говорить не о двух, а о трех ликах математики, о её триединстве, а не двуединстве. её третьим ликом является метаматематика, та её область, которая одновременно является метапредметной по отношению к ней. Предметом метаматематики является развитие идеальных способов исследования её второго лика, то есть концептуального аппарата и «технических» средств метатеоретического моделирования, осуществляемого и реализуемого с помощью идеальных способов исследования. Результаты метаматематики, являющиеся продуктами погружения в сокровенные глубины математической деятельности, сами становятся и продуктивными стратегическими, и продуктивными «техническими» её орудиями, и «средствами производства» таких орудий.

следования (в том числе и обоснования его результатов) и идеальных «средств производства» таких орудий является не просто родовой и даже не просто видовой, но индивидуальной характеристикой математики. *Математика – это развивающиеся концептуальный аппарат и «технические» средства метатеоретического моделирования, осуществляемого и реализуемого с помощью названных трехуровневых идеализаций.* Тем самым она представляет собой область знания, предметом которой являются мета-формы и мета-способы поисково-исследовательской деятельности.

Так как осуществимость и полнокровная реализуемость третьего уровня идеализации возможна только при осуществлении первого и второго её уровней, то последний тезис можно переформулировать так: ***математика – это развивающиеся концептуальный аппарат и «технические» средства метатеоретического моделирования, осуществляемого и реализуемого с помощью идеальных способов исследования (*и их продуктов*), развиваемых посредством формирования и развития их орудий и «средств производства» таких орудий.*** А значит, *математика – это, прежде всего, развивающееся субъектное начало,* несущее возможность всё более глубинного самопознания Человека и тем несущее его преображение и открывающее возможность постижения всё более глубинных законов бытия.

В условиях исследования идеальных способов исследования идеальных объектов, погруженных в идеальные миры, и приложений его результатов, в условиях нарастания разнообразия исследуемых объектов и методов их исследования, в условиях обращения к возможным мирам происходит развитие субъектов такой деятельности, рождается новый тип мышления, новый тип рефлексии. Его развитие сопровождается развитием воображения, нарастанием дальновидения и дальнодействия мышления, нарастанием его многомерности и многоуровневости. Обращения к возможным мирам обогащают математику и как «часть физики» и ведут к далеко идущему её развитию.

Достижения математики в области исследования идеальных способов исследования, формируемые и развиваемые ею орудия таких исследований делают всё более необходимой, всё более значимой её роль в научных и технических исследованиях.

* * *

В какой мере обучение математике в общеобразовательной школе отвечает когнитивной и эпистемологической природе математики? В какой мере оно несет развитие способности мыслить надситуативно? В какой мере оно направлено на постижение *механизмов развития идеальных способов исследования идеальных объектов в рамках идеальных миров,* на постижение *механизмов формирования и развития их орудий и «средств производства» таких орудий?* Ответ очевиден: обучение математике в общеобразовательной школе приобщает учащихся к идеальным способам исследования идеальных объектов, но не предполагает их приобщение к поисково-исследовательской деятельности, направленной на формирование и развитие орудий такого исследования[9]. При всем том, что оно несет немалое общее интеллектуальное развитие и развитие способности мыслить надситуативно, развитие креативных качеств при этом является не только его эпифеноменом. Но такое обучение не направлено на приобщение учащихся к мета-формам и мета-способам поисково-исследовательской деятельности и не несет средств достижения этой цели. Тем самым оно не направлено на приобщение учащихся к продуктивным общим формам и способам поисково-исследовательской деятельности, а значит, не направлено на ведущую цель общего образования, состоящую в приобщении учащихся к общим формам и способам человеческой деятельности.

Ведущее средство приобщения учащихся к мета-формам и мета-способам поисково-исследовательской деятельности – это вовлечение их в процессы формирования, освоения и развития ведущих понятий школьного курса математики, но не такое, какое, по сути, представляет лишь объяснительное средство, направленное на усвоение формируемых понятий и научение использовать их посредством соответствующих упражнений. Для достижения требуемой цели такие процессы

[9] Говоря несколько огрубленно, такое обучение несет формирование и развитие механизмов ассимиляции (в смысле Пиаже), но не несет формирования механизмов аккомодации.

должны строиться как процессы многомерной поисково-исследовательской деятельности самих учащихся (конечно же, корректируемой учителем в форме направляющих задач и вопросов, относящихся к стратегиям и тактическим средствам поиска, то есть деятельности, осуществляемой в духе системы развивающего обучения Эльконина-Давыдова). Они должны включать формирование проблем стратегического уровня и испытания на продуктивность своих продуктов. Осуществление таких процессов как направляемых метапредметным уровнем и протекающих под постоянным его контролем, несет учащимся системное их восприятие как целостностей, и тем самым – постижение их логики. Более того, это дает возможность усмотрения в логике такого процесса общей логики подобного рода процессов как процессов восхождения от уровня наивных представлений на уровень классической рациональности и формирования стратегических орудий поисково-исследовательской деятельности и «средств производства» таких орудий. Это несет усмотрение в самом процессе мета-модели процессов такого рода.

В описываемых процессах используются – и притом системным образом – все приемы и методы, обычно используемые в обучении математике. О продуктивности таких процессов как средств обучения математике говорилось и в прежних наших статьях в ШТ. Важность и новизна относящегося к ним вывода, к которому мы здесь пришли, состоит в выявлении их *необходимости* как средств достижения целей общего образования.

Не менее важно и то, что такие процессы являются и средством более качественного освоения школьного курса математики как «части физики». Ведь метапредметный уровень может и должен не только надстраиваться в качестве верхнего этажа над освоенными знаниями как знаниями предметного уровня, но и быть эффективным средством освоения самих этих знаний. Подобное обучение закладывает потенцию далеко идущего интеллектуального развития учащихся и тем самым в большей мере отвечает и гуманитарным целям и потребностям современного социума. При таком обучении учащийся становится не только каменщиком, но и архитектором своего интеллекта.

Уровень развития исследовательских качеств учащихся, достигаемого таким обучением, представляется необходимым сегодня и ещё более необходимым завтра. А значит, средства такого обучения как школьников, так и будущих учителей должны стать важным предметом методики обучения математике и общей дидактики. ❑