МАТЕМАТИКА КАК «ЖИВОЕ ЗНАНИЕ» компетентного школьника

Александр Николаевич Дахин,
профессор Новосибирского государственного педагогического университета, доктор педагогических наук

Основной смысл междисциплинарного переноса математического опыта, делающего любое знание «живым», а ученика компетентным, подчеркнём словами Д. Пойа. «Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, их нужно выработать так, чтобы они вошли и в плоть, и в кровь, и действовали с силой инстинкта. Поэтому для развития мышления действительно полезным является только его упражнение»[1].

• *компетентность школьника* • *педагогические средства математики* • *живое знание* • *познавательный материал* • *дидактические построения*

Математическое знание как часть культуры

Однако сами упражнения бывают разными, поэтому есть смысл определить разницу между принятой в бихевиоризме формулой обучения «стимул—реакция» и свободным учебным действием, то есть «акцией». Первая опосредована и определяется в основном внешним педагогическим воздействием. Математика как учебная дисциплина знакома с такими явлениями, допустим, через применение стандартных алгоритмов или типовых приёмов для решения задач. Вторая — активная позиция — обусловлена внутренней культурой школьника как субъекта обучения. Вот здесь математический инсайт, если так можно выразиться, окажет неоценимую услугу при формировании высокой компетентности школьника, творящего собственный Мир культуры. Назовём такую компетентность общемыслительной, но охарактеризуем чуть позже.

В педагогической психологии вопрос внутреннего опосредования вызывает интерес уже со времён Эдварда Толмена, применившего в 1948 году «промежуточные переменные» для эффективных дидактических построений своих знаменитых когнитивных карт.

Однако В.П. Зинченко, характеризуя процесс успешного присвоения учащимся социального опыта, полагает, что «опосредование психики в самом общем смысле

[1] *Пойа Дж.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Джордж Пойа. — М.: Наука, 1976. — 448 с., илл. — С. 74.

означает включённость всех психических актов (процессов, функций, функциональных органов — новообразований, персональных конструктов) в культурный контекст жизни и деятельности индивида. В качестве средств выступают артефакты: орудия труда, утварь, знаки (в том числе иконические), слова (язык), символы, овеществлённые смыслы и ценности, мифы, культура в целом»[2].

Дело в том, что педагогические средства математики как учебной дисциплины далеко не исчерпаны для решения, не побоюсь этого слова, воспитательной задачи. Далее, по законам жанра, должно следовать многозначительное «но». Так и поступим. Но школьная математика ориентирована на решение специфических, не всегда практических, малопригодных для жизни задач. Постараемся частично снять этот пробел хотя бы средствами одной статьи, насколько это, конечно, возможно.

В образовательном стандарте предметной области «Математика и информатика» прямо сказано о целевых ориентирах этих дисциплин, включающих сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, а также как об универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления[3]. Но объём математических знаний достаточно велик, поэтому на первом этапе желательно познакомить школьника хотя бы со способами такого описания, которые геометрия предоставляет в избытке, приводя в восторг не только современного школьника, но и когда-то А.С. Пушкина, постигшего истинный смысл просвещения без какого-либо государственного образовательного стандарта.

О сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух,
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг.

[2] *Зинченко В.П.* Нужно ли преодоление постулата непосредственности? / В. П. Зинченко // Вопросы психологии. — 2009. — № 2. — С. 6.

[3] Федеральный государственный среднего общего образования / В ред. Минобрнауки России от 29.12.2014. — № 1645.

Перейдём к описанию заявленного «живого знания», находящегося, по мнению великого русского поэта, в определённой родственной связи с опытом трудных ошибок. В контексте данной статьи «живое знание» сродни общемыслительной компетентности учащегося. Заметим, что при введении понятийно-информационного аппарата, используемого при описании общемыслительной деятельности школьников, у любого автора часто возникает соблазн произвести аналитический обзор наиболее часто встречающихся понятий дидактики, близких к компетентности, и, сопоставив их, «осчастливить» российское учительство ещё одним — собственным — определением общемыслительного опыта (пусть будет компетентности). Судя по всему, обойтись без ссылок на признанные авторитеты и на этот раз не получится — к этому обязывает цель данной статьи. Но для сопоставления возникают два препятствия (возможно, и больше). Первое связано с тем, что подобная работа уже проводилась другими авторами; второе касается смысловой нагрузки: научно-педагогические, узкодидактические и даже гносеологические термины употребляются в различных контекстах. При этом они имеют множество аспектов, смысловых оттенков, содержательных нюансов. Так что их прямое сопоставление не всегда корректно. Поступим по-другому. Отталкиваясь от нормативных требований, заложенных в Федеральном государственном образовательном стандарте[4], предложим примеры междисциплинарного влияния математики на познавательный опыт учащегося, способного перенести его в другую предметную сферу, ориентированную на общемыслительную активность субъекта познания.

Влияние математики на познавательный опыт учащегося

Сделаем это на конкретном примере геометрических задач, решение которых для начала желательно разобрать. Это уже

[4] Там же.

сделано В.Н. Дятловым, нам достаточно воспользоваться рассуждениями автора и прокомментировать их в контексте формирования общемыслительной компетентности, которую мы рискнули назвать «живым знанием», продуцированным математикой[5].

Задача 1.

В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении 3:1, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK = 3$, $KN = 1$. Найти стороны треугольника ABC.

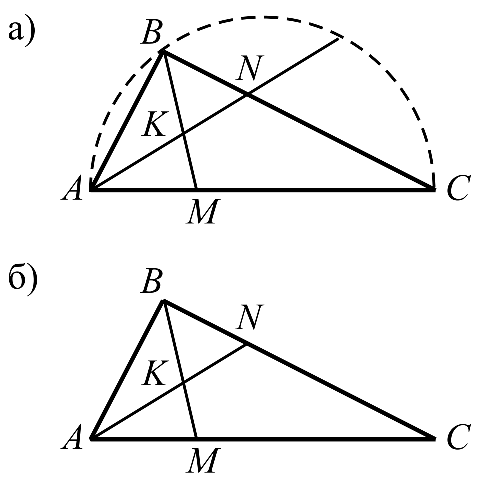

Рис. 1. Подготовительный чертёж, удобный для поиска решения задачи

В условии есть два повода начать построение чертежа с полуокружности — прямоугольный треугольник и биссектриса. На рис. 1 изобразим полуокружность с диаметром AC, возьмём на ней точку B и соединим её с точками A и C, получив прямоугольный треугольник. Разделим пополам дугу ВС и полученную точку соединим с A. Таким образом мы с высокой точностью изобразили биссектрису угла A. Разделим AC на четыре равные части и отметим точку M на AC. Получив точку K пересечения AN и BM, посмотрим, похоже ли, чтобы отрезки AK и KN соответствовали условиям задачи. Придётся принять, что для построения правдоподобного чертежа нам пришлось бы расположить точку B настолько близко к точке A, что необходимые для размышления над решением задачи детали чертежа просматривались бы с трудом. Поэтому пожертвуем правдоподобностью ради наглядности и изобразим треугольник так, как это сделано на рис. 2.

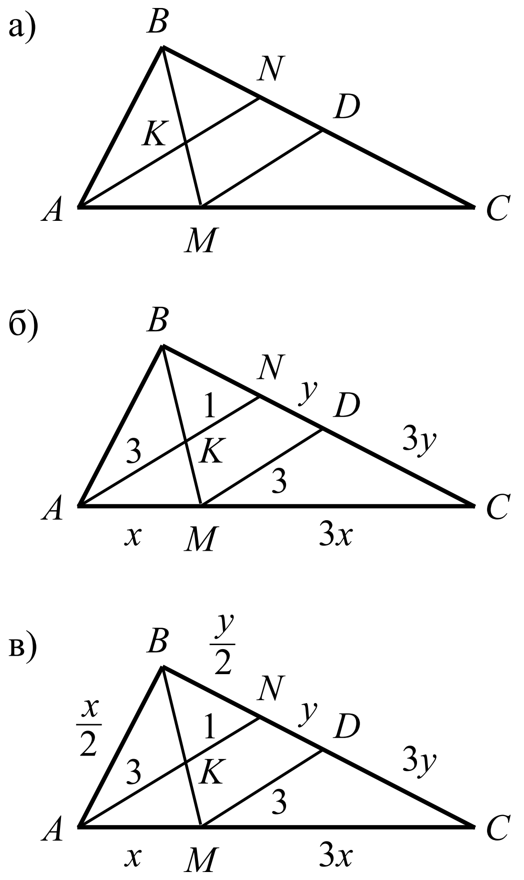

Рис. 2. Рабочий чертёж с дополнительными построениями

Удалим с чертежа вспомогательные линии и получим пригодную для анализа решения заготовку. Заметим, что есть треугольник с двумя пересекающимися отрезками в нём. Кроме того, нам задано отношение длин отрезков, на которые делится сторона концом одного из отрезков. И ещё, один из отрезков — биссектриса, и треугольник

[5] *Дятлов В.Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 9. Как научить (ся) решать задачи по планиметрии / В.Н. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — С. 24–26.

прямоугольный. Пока не совсем понятно, что здесь можно использовать, хотя теорема Пифагора всегда к нашим услугам. Через конец одного из отрезков надо провести прямую, параллельную прямой, включающей другой отрезок, далее использовать подобие появившихся треугольников. Лучше провести прямую через конец того отрезка, о котором известно какое-либо отношение. В нашем случае известно отношение $AM:CM$. Выразим длины отрезков AM и CM в условных единицах длины, пусть $AM = x$, $CM = 3x$, проведём прямую через точку M параллельно прямой AN. Получаем две пары подобных треугольников

$\Delta ANC \sim \Delta MDC$, $\Delta BMD \sim \Delta BKN$.

Для первого из подобий известен его коэффициент, поэтому получаем:

$AN/MD = CN/CD = AC/CM = 4/3$.

Отсюда, а также из условия получаем, что $DM = 3$; соотношение $CN:CD$ тоже известно. Пусть $DN = y$, $CD = 3y$.

$BD/BN = BM/BK = MD/KN = 3/1$.

$BN = y/2$.

Получили разбиение отрезка BC на отрезки с известными отношениями длин.

Как использовать биссектрису? Вспомним о делении этой замечательной линей соответствующей стороны на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам. Тогда получаем соотношения.

$BN:CN = 1:8$, $AB = x/2$.

По теореме Пифагора для треугольников ABC и ABN получаем

$16x^2 = x^2/4 + 81y^2/4$; $x^2/4 + y^2/4 = 16$.

$x = 6$; $y = 2\sqrt{7}$

Ответ: $AB = 3$; $BC = 9\sqrt{7}$; $AC = 24$.

Здесь уместно бросить обобщающий взгляд на решение и поиск продуктивных форм мышления, приводящих последовательно и верно к правильному ответу. Сам «поиск» или, как сейчас модно говорить квест, (англ. *quest*) известен в педагогической практике ещё с античных времён. Даже в мифологии понятие «квест» изначально обозначало один из способов построения сюжета — путешествие персонажей к определённой цели через преодоление трудностей.
У нас были свои трудности в решении этой задачи и свои математические персонажи. Перечислим их.

1. Умение построить удобный чертёж.

2. Разбиение исследуемого объекта (в нашем случае треугольника) на простые формы, содержащие информацию о себе.

3. Наличие шаблонов-заготовок, пригодных для расчёта отношений длин отрезков. Для нашей задачи важным оказалось свойство биссектрисы треугольника.

В принципе, этого вполне достаточно, чтобы успешно образовался образовательный квест как педагогическая технология, включающая набор проблемных заданий с элементами познавательной деятельности и даже ролевые формы. Для выполнения последних требуются геометрические ресурсы, шаблоны, удачные дополнительные построения, которые можно обсуждать. Здесь уже виден следующий шаг к междисциплинарному квесту, как головоломке, зашифрованной информации и другому содержательному поиску.

Вторая задача поможет понять другой вид поисковых стратегий, любезно предоставленных геометрией для обогащения «живого знания» современного российского школьника.

Задача 2.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M. Причём $AK:KB = 2:3$, $BL:LC = 1:2$, $CM:MA = 3:1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM?[6].

Решение.

Изобразим треугольник ABC, разделим стороны на соответствующие части и отметим на сторонах точки K, L и M. Получим полезные отношения, задав на каждой из сторон некую условную единицу измерения и выразив длины соответствующих отрезков в этих единицах. Пусть $AM = x$, $CM = 3x$, $AK = 2y$, $BK = 3y$, $BL = z$, $CL = 2z$ (рис. 3).

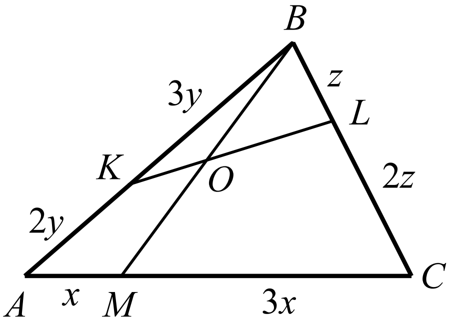

Рис. 3. Треугольник с исходными данными задачи

Каковы особенности, связанные с данными? Надо либо через конец какого-то треугольника проводить параллельные прямые, либо проводить прямую, параллельную какой-то стороне, и выносить на неё подобие. Так как доли отрезков не очень хорошо соизмеримы, видимо, уместнее провести прямые, параллельные основанию. Через вершину B проведём прямую, параллельную AC, и пусть E — точка пересечения прямой KL с этой прямой, а F — точка пересечения прямой KL с прямой AC. Получаем набор подобных треугольников. Из подобия треугольников «через точки L, K и O», т.е. подобий $\Delta BEL \sim \Delta AKF \sim \Delta BKE$, $\Delta FMO \sim \Delta BOE$. Пусть $AF = a$, $BE = b$. (рис. 4). Тогда получаем ряд соотношений.

$(a+4x)/b = CL/BL = 2$, $a/b = AK/KB = 2/3$,
$MO/BO = (a+x)/b = a/b + x/b$.

Из первого равенства с учётом второго получаем

$a/b + 4x/b = 2$, $2/3 + 4x/b = 2$,
$x/b = 1/3$.

$MO/BO = a/b + x/b = 2/3 + 1/3 = 1$.

Ответ: $MO:BO = 1:1$.

Обсудим основные свойства, понимание которых привело к быстрому поиску правильного решения учеником. Такой опыт, возможно, и создаст «промежуточные переменные» Э. Толмена, пригодные для нового геометрического квеста.

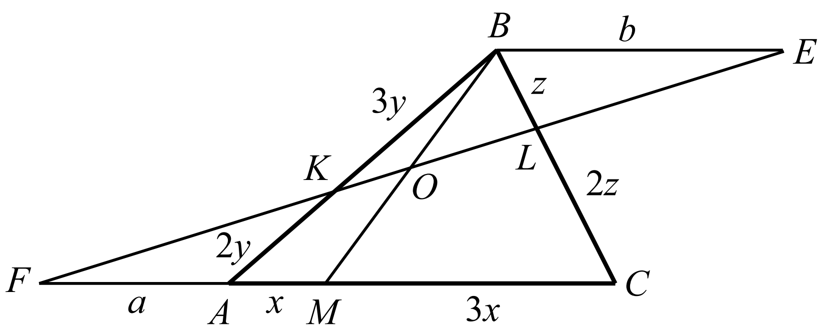

Рис. 4. Треугольник с дополнительными квест-построениями

[6] *Дятлов В.Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 9. Как научить (ся) решать задачи по планиметрии / В.Н. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — С. 35–37.

Во-первых, учащимся стало понятно, что треугольник лучше сравнивать с подобным треугольником, который можно искусственно привнести на чертёж, даже если изначально его там нет.

Во-вторых, прямые расчёты не всегда рациональны, они сложны для анализа и, как правило, содержат много неизвестных, что приводит к системе уравнений с большим числом неизвестных. Поэтому наши геометрические инсайты предпочтительнее и быстро привели к ответу. Хотя в каждом случае необходимы свои поиски. Поэтому в качестве резюме приведём рекомендации по решению исследовательский задач, предложенные в своё время Рене Декартом, но не потерявшие своей актуальности в эпоху глобальных педагогических инноваций. Для решения задачи важно:

- не торопиться в суждениях;
- избавляться от предвзятых мнений;
- делать по возможности более полные обзоры того, что сделано предшественниками;
- каждый вопрос необходимо разложить на более простые;
- начинать решение с простейшего, переходя затем к более сложному.

Данные рекомендации, конечно, используются в современной методике обучения математике[7]. Но в конце статьи постараемся предложить собственное знание о «живом знании», выведенное из геометрической тематики.

Компетентность школьника, обладающего живым знанием

Как же охарактеризовать компетентность школьника, обладающего живым знанием? Для нашего рассмотрения подходит позиция А.Ж. Жафярова, трактующего в самом общем виде компетенцию в этой области человеческой деятельности как название вида этой деятельности, необходимого для успешного выполнения заданий. Достижение нормы «успешности» подтверждает правильность решения поставленной перед субъектом проблемы. Несоответствие норме свидетельствует об ошибочности выбранного пути её достижения, т.е. некомпетентности в данной сфере, т.к. *компетентность* — это уровень владения субъектом соответствующей компетенцией, характеризующий личностные качества обучающегося[8]. В нашем случае это качество относится к способности расчленять глобальную проблему на простые составляющие, решение которых отработано на технологическом уровне.

Постараемся, модифицируя рекомендации В.Н. Дятлова, представить «штучный» опыт учащегося, выведенный им с помощью описанных выше геометрических квестов и, на мой взгляд, обогащающих общемыслительную культуру школьника[9]. Сразу оговорюсь, что эти соображения не универсальны, а демонстрируют только «готовность» геометрического познавательного материала к такого рода дидактическим построениям. Другой автор в другой ситуации увидит иные формы знания-предписания, структурирующие познавательные способности школьника.

Итак, сведения, содержащиеся в условии задачи, желательно детально изобразить в разных знаковых формах: алгебраической через формулы и геометрической, т.е. на чертеже.

---

[7] *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Как сделать изучение теорем геометрии более эффективным? // Математика в школе. — 2017. — № 3. — С. 34–36.

[8] *Жафяров А.Ж.* Формирование метапредметной компетентности учащихся 7-х классов в процессе интеграции изучения физики и математики: учебное пособие / А.Ж. Жафяров, А.Н. Дахин, К.А. Юрьев; под ред. чл.-корр. РАО, д-ра физ.-мат. наук, проф. А.Ж. Жафярова; Мин-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. пед. ун-т. — Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2014. — 174 с. — С. 17–19.

[9] *Дятлов В.Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 9. Как научить (ся) решать задачи по планиметрии / В.Н. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — 112 с. — С. 7–9.

Особенности, связанные с данными условия задачи, анализируются через участие фигур в конкретных геометрических «сюжетах», определяются характерные этюды, бросающиеся в глаза фрагменты фигур (отрезки, дуги окружности, части треугольников и т.п.).

Далее следует осуществить мысленный квест на один шаг вперёд (или несколько шагов, если это несложно) и получить вытекающие из этого следствия. Иногда они помогают в решении.

Можно начать поиск с конца. То есть анализировать не условие, а требуемую в ответе информацию, которую можно получить из каких-то других сведений. Назовём этот способ «шаг назад». Узнаем ли мы ответ, если получим сведения о каких-то характеристиках изучаемого объекта? Разумеется, при желании «шаг назад» может превратиться в небольшую прогулку, т.е. не запрещены и несколько обратных ходов, если в этом прослеживается продуктивное начало.

И, наконец, в любой задаче, если она сформулирована корректно, нет лишних данных. Понимание этого — ещё один «опыт, сын ошибок трудных». Такого рода общемыслительная компетентность носит несколько латентный характер, и помогает нам, когда, казалось бы, все поиски уже исчерпаны, а результативной цепочки рассуждений от условия задачи к её ответу по-прежнему нет. Здесь важно не просто механически перечитывать условие, а вчитываясь, анализировать, как это уже использовалось или может ли использовано ещё раз. По-моему, на этой жизнеутверждающей ноте целесообразно перейти к резюме.

Каким же свойством обладает живое знание? Это знание, которое не подлежит нормативной фиксации, самопостроенное знание, обладающее каким-то внутренним мифом, тайной, чудом открытия, если угодно. Оно есть предмет собственного восхищения процессом познания, а не только направлено на предмет изучения. Оно едино и даже единственно, непосредственно, имеет свойство участвовать в самосовершенствовании. В чём можно убедиться, разбирая со школьниками подобные задачи. **НО**