Эвристическая карта познания в образовательной и исследовательской деятельности учащихся в школе

***Валерий Николаевич Клепиков**,*
кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Институт изучения детства, семьи и воспитания» РАО, учитель математики и этики МБОУ СШ № 6 г. Обнинска, кандидат педагогических наук, Klepikovvn@mail.ru

• математическая картина мира • ценностно-смысловой подход • креативно-опорные сигналы • эвристическая карта познания • концептуальные блоки-модули • самоорганизация • индивидуальная траектория развития • интеграция, метапредметность • пластическое мышление • проблемность • искусство вопрошания • точки роста

Эвристическая карта познания – это целостная личностно ориентированная траектория продвижения индивидуального образования в какой-либо области, формируемая посредством креативных вопросов, противоречий и проблем, гипотез, точек роста и т.п. Тем самым эвристическая карта познания есть важнейший регулятор творческой и исследовательской самоорганизации юного человека в построении индивидуальной научной картины мира.

Одной из важнейших целей современного образования является построение учащимися *современной научной картины мира*. Важно учитывать, что в своих важнейших компонентах научная картина мира должна принадлежать именно XXI веку, а не прошлым векам, как это нередко получается в консервативных образовательных парадигмах, нацеленных только на поддержание традиций. В частности, на одну из них указывает в своей книге «Методология учебной деятельности» А.М. Новиков: «…концептуальная разобщённость школьных предметов приводит к тому, что, с одной стороны, у ученика в голове не складывается целостной картины мира, а остаются лишь отрывочные сведения, с другой стороны, эти не связанные с личностными интересами учащихся, с их дальнейшими судьбами, их дальнейшими потребностями практической деятельности, быстро ими теряются и забываются»[1].

Существенной частью научной картины мира является *математическая картина мира*, которая, как нам представляется, должна целенаправленно формироваться в образовательном процессе современной школы. В этой связи в последние годы в сфере математического образования всё явственнее и насущнее возникает необходимость разведения таких понятий, как *«программа индивидуального обучения»* и *«индивидуальная карта познания»*. В первую очередь это связано с гуманитарной направленностью современного образования, в котором на первое место ставится человек, его внутренний мир, а значит, обучение, воспитание и развитие не могут рассматриваться вне интересов человека, вне его культуры и мировоззрения. Конечно, кардинального различия между данными образовательными моделями быть не может, но в карте познания, несомненно, превалирует личность ребёнка, его личностные установки, мировоззренческая направленность, т.е. *ценностно-смысловой подход*.

Более того, на наш взгляд, в последнее время более востребованной становится даже не *учебная карта познания (темы, понятия, правила, формулы, теоремы, аксиомы, ин-*

[1] **Новиков А.М.** Методология учебной деятельности. – М., 2005.

формация и т.п.), а *эвристическая карта познания (вопросы, противоречия, проблемы, гипотезы, прогнозы, креативная информация т.п.)*, с помощью которой современный ученик выявляет и направляет свой творческий потенциал, свои творческие возможности в единое русло. Именно эвристическая карта познания является промежуточным образовательным продуктом, который позволяет плавно переводить учебно-познавательную работу учащихся в *научно-исследовательскую деятельность*.

В этой связи важно добавить, что современные образовательные теории ориентируют учащихся на «*внешние продукты*» обучения (знания, методы решения задач, вычислительные приёмы и т.д.). Так, учащиеся решают огромное количество задач и примеров, но совершенно не понимают, для чего это делается, и какое значение они имеют для их личностного развития. Об этом беспокоился и основоположник развивающего обучения В.В. Давыдов[2]. Эвристические карты познания должны быть ориентированы на «*внутренние продукты*», включать в себя *личностные ценности* и *смыслы*. Например, ставить индивидуальные вопросы, формулировать собственное видение проблемы, давать личностную интерпретацию, способствовать сочинению близких внутреннему миру учащегося эссе, минитекстов и т.п.

«Внутренние продукты» образования, конечно же, могут содержать и личностно обусловленные ошибки. В этой связи актуальным выглядит предупреждение великого писателя Г.К. Честертона: «Привычные ошибки почти всегда верны. Почти всегда они нащупывают истину, неведомую тем, кто поправляет ошибающегося»[3]. На наш взгляд, ошибки могут быть более конструктивными элементами мышления человека, чем результаты мышления «автоматом», когда он даже и не замечает «как это случилось». Поэтому «сопротивление» образовательного материала для учащегося есть необходимое условие его развития.

Опытный, проницательный педагог не настаивает на верном варианте понимания или решения, а пытается с помощью наводящих вопросов вникнуть во внутренний мир ребёнка, мудро рузрулить ситуацию, «разрыхлить» проблемное поле его сознания, раскрыть ему его «точки опоры», «векторы развития» и тем самым выстроить индивидуальную логику постижения задачи. Поэтому важно идти не только в логике наукообразного материала, которую в своих крайних проявлениях осуществляет педагог в русле явного или скрытого личностного насилия, но в логике эволюции внутренних смыслов детей, которые нередко запутанны и не всегда приводят прямолинейным путём к искомому результату.

Эвристическая карта познания – это целостная наглядно-графическая траектория продвижения индивидуального образования учащегося в какой-либо области, в которой фиксируются креативные вопросы, обнаруживаемые проблемы и противоречия, формулируются гипотезы, проектируются «точки роста» и т.п. Отсюда эвристическая карта познания – это не нечто статичное, создаваемое для всех учащихся, а относительно завершённое, живое, *индивидуальное творение*.

В эвристической карте познания широко используются лаконичные вопросы, знаки, символы, схемы, формулы, образы, рисунки, анимация, таблицы и т.п. Другими словами, целый спектр различных моделей, сворачивающих, спрессовывающих и кодирующих информацию. В ходе создания карты учащийся учится таким важным исследовательским компетенциям, как *планирование*, *моделирование*, *кодирование*, *проектирование*, *рефлексирование*, *прогнозирование*.

Требования к эвристической карте познания следующие: она должна быть достаточно проблемной, иметь точки роста, разумные пределы или полноту (не уходящую в дурную бесконечность), достаточную концентрацию материала (чтобы быть понятной), индивидуально ориентированной, адекватной (грамотно отражать математические знания). Таким образом, эвристическая карта познания – это органичный кирпичик в строящейся математической картине мира учащегося.

Для *проблематизации материала* очень важно на уроках и заседаниях научного общест-

[2] **Давыдов В.В.** Теория развивающего обучения. – М., 1996. – С. 244.

[3] **Честертон Г.К.** Вечный человек. – М., 1991. – С. 312.

ва учащихся (НОУ) проводить дискуссии, эвристические беседы, «мозговые штурмы». При этом на заседании научного общества учащихся могут присутствовать ребята из разных классов, что позволяет выявлять различные точки зрения, «трения», возрастные предпочтения и смыслы, а значит, целый спектр взаимодополняющих мнений.

Начинается построение карты с *главного, сквозного вопроса*, например: как измерить высокие или недоступные объекты мира? Сколько измерений имеет наш мир, и возможна где-либо другая размерность? Почему окружность (круг, сфера, шар) является самой гармоничной фигурой в мире? Почему пифагорейцы пришли в ужас, когда встретились с иррациональными числами? В чём состоит суть проблемы несоизмеримости? Почему для египтян была важна именно модель пирамиды? Как смоделировать (построить) наиболее гармоничные объекты, или в чём состоит красота древнегреческого Парфенона? Существуют ли математические константы? Как древние греки находили длину окружности, площадь круга и сферы, объём шара? Как математики определяли цифры после запятой числа π? Как влияют параметры квадратного трёхчлена (a, b, c) на расположение и форму графика квадратичной функции? и т.п.

Основу карты составляет *архитектура вопросов*. Построение карты познания обычно начинается с погружения учащегося в проблемное диалоговое поле, где он *нащупывает проблемные вопросы*, которые он ставит перед собой. Тем самым он культивирует в себе очень нужное и полезное *искусство вопрошания*. С помощью вопросов он как бы в онемевшую информацию вдыхает жизнь, придаёт ей нужную креативную форму (проблема, парадокс, противоречие, неожиданный ракурс и т.п.), заставляет говорить её *различными голосами*. И в этом учитель должен ему в ходе интерактивного взаимодействия помочь.

Отправной точкой может стать *примерный вопросник (его можно держать в голове, но лучше всё-таки создать электронный текст, который можно легко распространять и пополнять)*, в котором очерчивается круг возможных вопросов по определённой проблематике. Для учащегося важно найти и поставить именно СВОЙ вопрос! (Конечно, для этого нужно погрузиться в выбранную проблематику.) Именно с этого, своего, вопроса для него собственно «всё и начнётся».

А для этого требуется, скорее, не *логическое*, а *пластическое мышление*. Наши исследования показывают, что ещё до логического мышления в ходе доказательств дети используют именно пластическое мышление, которое для них естественно, органично и интуитивно понятно. Недаром в педагогике часто используются такие понятия, как «развитие», «точка роста», «прорастание», «генетически родственные понятия», «погружение», «сжатие», «растяжение», «превращение» и т.д. Самые элементарные признаки пластического мышления: последовательность, непрерывность, обозримость, «осязаемость» границ, стремление к преодолению границ и т.д.

Напомним, глубочайший знаток древнегреческой культуры А.Ф. Лосев в ходе многолетних исследований сделал важный вывод о том, что главной чертой древнегреческого сознания является такое свойство, как *пластичность*. Пластика пронизывают древнегреческую философию, искусство, науку, и в частности, математику. По мнению учёного: «Греческое слово «пластика» указывает на вылепленность, вылитость, вещественную сделанность и отделку»[4].

Возьмём для примера различные виды так называемой непрерывной пропорции: среднее арифметическое: $а – в = в – с$, среднее геометрическое: $а/в = в/с$, среднее гармоническое: $1/а – 1/в = 1/в – 1/с$, золотое сечение: $1/в = в/(1 – в)$. Как мы видим, везде присутствует связующая переменная – *в*. Поэтому далеко не случайно в работах великого Платона зафиксировано: «Однако два предмета (числа) сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое. И задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция…»[5]. Тем самым символом пластического мышления может выступать непрерывная пропорция.

[4] **Лосев А.Ф.** История античной эстетики. Ранняя классика. М., 1994. С. 263.

[5] **Волошинов А.В.** Пифагор. М., 1993. С. 138.

Таким образом, суть *пластического мышления* древних греков состоит в его постепенности и непрерывности (в плавных переходах от одного к другому), «телесности», «осязательности», «обозримости», наглядности и планомерности[6]. По словам А.Ф. Лосева, можно спорить о правилах и принципах, по которым происходит соединение отдельных мыслей в разных культурах, но факт остаётся фактом – вся *древнегреческая культура пластична*. И тогда, когда мы говорим по инерции, что это логическое рассуждение, на самом деле – это есть именно пластическое постижение какого-либо феномена.

В этой связи важно отметить, что эвристическая карта познания строится не только на основе логического, но и на базе пластического мышления. *Структура эвристической карты* (матрица) состоит примерно из 15–20 ячеек на одной странице А4, которые по мере поступления и вызревания информации учащимся заполняются. После того, как карта заполнена, в дальнейшем её можно дополнять, изменять и переструктурировать, в соответствии с проектируемым целым (например, математической картиной мира). Строить карту или двигаться по карте, т.е. осуществлять навигацию, также можно в более востребованных и перспективных на данный момент направлениях. В этом также обнаруживаются свойства пластичности эвристической карты познания, которыми она постепенно обогащается.

Для перехода эвристических карт познания в математическую картину мира очень важны *перекрёстные узелки*, где встречаются различные темы. Например, с темой о пропорции встречаются такие важные темы-линии, как «отношение», «часть, доля и целое», «рациональные и иррациональные числа», «квадратное уравнение», «масштаб», «математические константы», «геометрические построения» (с помощью циркуля и линейки) и т.п. Благодаря пересечению различных тем образуется «*концептуальная сетка*», которая в дальнейшем и формирует каркас математической картины мира. При этом «несущими конструкциями» для учащегося могут стать именно те составляющие, которые ему в ходе исследования особенно стали близки. Например, юному художнику могут быть привлекательны модели, построенные с помощью «формулы красоты» и т.п. Здесь также возникает пластический образ: математическая картина мира уподобляется *сотканному ковру*.

Эвристическая карта познания строится не только в соответствии с *программой*, но, главное, в соответствии с познавательными интересами ребят в зоне их ближайшего развития. Поэтому движущей силой образовательной траектории являются вопросы и проблемы, которые по мере развития встают перед учащимися. Задача учителя – в том, чтобы скорректировать субъективные интересы учащихся и объективные программные требования.

Наведением на построение эвристической карты познания становятся детские реплики и вопросы. Вот некоторые из вопросов.

- А можно ли подержать в руке треугольник (двумерную фигуру)?
- Зачем в одной из аксиом геометрии говорится о существовании треугольника, равного данному, разве это не очевидно?
- Если точки нульмерны, то разве могут из них состоять геометрические фигуры?
- Чем отличаются понятия «доля» и «часть»?
- А всегда ли «целое» и «всё» («весь», «вся» и т.д.) совпадают?
- Мы возводим 1 метр в квадрат, а можно ли с точки зрения математики 1 рубль возвести в квадрат? Что получится?
- Зачем нам строить перпендикуляр с помощью циркуля, когда мы легко можем его построить с помощью угольника?
- Почему абсцисса вершины параболы принадлежит одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания функции?
- Как это понять: человечество с развитием вычислительной техники будет вечно приближаться к точному значению какого-либо иррационального числа, но никогда его не достигнет?
- Можно ли считать число π в чём-то непредсказуемым, а цифры после запятой – расположенными случайным образом?
- Почему многие иррациональные числа можно отложить относительно единицы,

[6] **Волошинов А.В.** Пифагор. М., 1993. С. 138.

а число π, трансцендентное число, нельзя (проблема квадратуры круга)?
- Можно ли как-то перейти от иррациональных чисел к рациональным, и наоборот (проблема несоизмеримости)?
- А если к бесконечности прибавить число или ещё бесконечность, что будет?
- А каких чисел по количеству больше: натуральных или целых?
- Что «бесконечнее» — прямая или луч?
- Имеет ли в математике смысл скорость, равная 300 001 км/с, т.е. скорость, большая скорости света?

А вот некоторые ответы и реплики учащихся.
- Между любыми двумя числами залегает целая пропасть чисел.
- Доля всегда помнит о целом и части, в отличие от целого и части.
- Трёхмерные фигуры дают тень.
- Прямоугольник нельзя подержать в руке, так как он существует только на плоскости.
- Любая точка прямой является её центром.
- Бесконечную прямую охватить нельзя, поэтому наименовать и определить её невозможно.
- Окружность – это фигура, у которой ни одна точка не выпячивается, потому что она ровная.
- Число есть единство конечного и бесконечного.
- Так как точка является безразмерной и бесформенной геометрической фигурой, то из неё могут возникнуть все другие математические фигуры.
- Через две точки можно провести сколько угодно прямых, так как они безразмерные.
- Прямая состоит из большего количества точек, чем отрезок, так как она длиннее.
- Модуль помогает избавиться от всего отрицательного.
- Ой, я забыла высунуть минус!

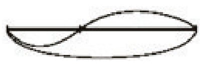
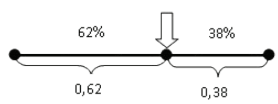
Предшественником эвристических карт познания для нас стали *креативно-опорные сигналы*[7]. Креативно-опорный сигнал – это особым образом сконструированная образовательная информация (взаимосвязанная модель ассоциативных ключевых слов, фигур, знаков, символов, образов), побуждающая учащегося к обновлённой или новой мысли, идее, гипотезе. Креативно-опорные сигналы создают как педагоги, так и учащиеся (нередко это происходит совместно). Именно креативно-опорные сигналы моделируют уникальную канву подачи и усвоения материала.

Наш опыт показал, что в *осмыслении и конструировании креативно-опорных сигналов*, а также эвристических карт познания, помогают наработки по развитию образного *и пространственного мышления* И.С. Якиманской, *опорным сигналам и конспектам* В.Ф. Шаталова, *укрупнённым дидактическим единицам* П.М. Эрдниева, *эвристическому обучению* А.В. Хуторского, *развивающему обучению* В.В. Давыдова. Наша заслуга состоит в том, что мы органично синтезировали данные наработки на базе *ценностно-смыслового подхода к математическому содержанию* и *информационно-коммуникационных технологий*.

Важно добавить, что зачатки креативно-опорных сигналов прорастают из долголетней практики учителя, в ходе долголетнего взаимодействия с детьми («узелки», «точки роста», «эвристические детали» и т.д.). Знания, опыт и творческий потенциал педагога концентрируются именно в таких «*узелках*», позволяющих в нужный момент актуализировать необходимую информацию. В креативно-опорных сигналах содержательная концентрация достигает наивысшей степени обобщения и глубины. Они накапливаются с годами, поэтому это своеобразная *копилка мудрости педагога*. И здесь незаменим мировоззренческий и профессиональный опыт учителя.

Можно сказать, что эвристическая карта познания есть развёрнутый и дополненный креативно-опорный сигнал. Это призыв не только к заинтересованному обучению, но и к пытливому исследованию! Эвристическая карта познания не есть нечто постоянное, неизменное – она меняется, трансформируется, дополняется, насыщается, уточняется и т.п. Путь её построения – от *наивных* сведений до *компетентной* ин-

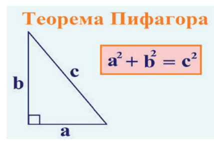
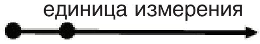
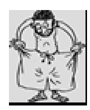
[7] **Клепиков В.Н.** Роль креативно-опорных сигналов на уроках математики в школе // Школьные технологии. – 2014. № 2. С. 64 – 71.

Эвристическая карта познания учащегося 8-го класса **Тема: «Пропорция как мера всех вещей»**		
Главный вопрос-проблема: *Как пропорция помогает гармонизировать объекты мира?* *«В геометрии существуют два сокровища: первое – это теорема Пифагора, второе – золотое сечение. Первое можно сравнить с мерой золота, второе – с драгоценным камнем» (Кеплер)*		
Целое – доля – часть В чём специфика каждого из понятий? Почему в учебниках *часть* и *долю* отождествляют? Почему Платон называет лучшей *связью* пропорцию?	***Пропорция*** Из чего состоит пропорция? *а/в = c/d; 2/4 = 3/6* 	**Равенство двух отношений** А можно ли взять три, четыре и более отношений? (Рассмотреть: прямо и обратно пропорциональные зависимости…)
Равновесие: «золотое правило механики»; $F_1/F_2 = l_2/l_1$ *«Дайте мне точку опоры…»* 	***Синонимы***: гармония, баланс, равновесие, соответствие, аналогия, мера, ритм, симметрия и т.д.	***Аналогия***: окружность относится к кругу как сфера к шару; Луна к Земле как Земля к Солнцу…
Признаки: равенство, отношение, органичное сочетание *целого*, *доли* и *части* 4/8 = ½ .	**Признаки и свойства пропорции («пластика»)** Как Фалес измерил высоту пирамиды Хеопса (он измерил свой рост и тени)?	***Основное свойство*** пропорции: *а/в = c/d*; ***свойство***: можно переставлять крайние и средние члены
Арифметическое среднее: *а – **в** = **в** – с*. ***Геометрическое среднее***: *а/**в** = **в**/с*.	**Виды пропорций** Сколько видов пропорции существует? Где они применяются?	***Гармоническое среднее***: *1/а – 1/**в** = 1/**в** – 1/c* ***Золотое сечение***: 1/***в*** = ***в***/(1 – ***в***)
Рациональные числа (m/n; 1,3333333… = 1/3); ***иррациональные числа*** (нет повторяющегося периода: $\varphi \approx$ 0,61803398…)	***Главные числа, встречающиеся в пропорции***: *1 (целое), φ, Ф.* 	**«Золотые числа»** $\hat{O} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\tilde{o}} = \frac{\tilde{o}}{1-\tilde{o}} \approx 1{,}62$ $\varphi \approx 0{,}62$; $\varphi \cdot Ф = 1$ **константы**
Используется в естественно-научной сфере: математика физика химия география биология астрономия	***Золотая пропорция*** **1/x = x/(1 – x)** *Модель Парфенона*  	***Используется в гуманитарной сфере:*** архитектура скульптура живопись музыка литература этика («золотое правило»)
Результат *Наиболее гармоничные доли объекта:* 1, φ^1, φ^2, φ^3, φ^4 … или 1; 0,62; 0,38; 0,24; 0,14…  		
Всемирная гармония Отблески пропорции проявляются в мире каждое мгновение и повсюду, празднуя жизнь, воспевая природу и красоту её проявлений. Она светится в чертах лица матери, склонившейся над ребёнком, шелестит совершенными по форме листьями на деревьях, удивляет затейливым узором чешуек на шишке или расположением лепестков на цветке. Её можно разглядеть в размерах зданий и школьной тетрадки, на живописных полотнах мастеров и в строении тельца юркой ящерки, в бабушкином вязании или в сплетенях паутины. Она есть в отпечатках собственного пальца и в божьей коровке, присевшей на этот палец, в бесконечных кругах, побежавших от брошенного в воду камешка, или в спиральных завихрениях дальней галактики, мелькнувшей на экране телевизора. Она завораживает в формах арфы и саксофона, фортепиано и скрипки, утешает и радует звуками музыки. И, в конце концов, она вдохновляет человека изучать *гармонию*, творить по её законам и создавать совершеннейшие творения.		

Возможные темы для исследования
1. Пропорция как мера всех вещей. 3. Пропорция в науке, искусстве и жизни. 2. Золотое сечение и гармония мира.

Эвристическая карта познания учащегося 8-го класса
Тема: «Теорема Пифагора: гармония рационального и иррационального»

Главный вопрос-проблема: Почему теорема Пифагора так знаменита?
«В геометрии существуют два сокровища: первое – это теорема Пифагора, второе – золотое сечение. Первое можно сравнить с мерой золота, второе – с драгоценным камнем» (Кеплер)

Рациональные числа Верно ли, что все рациональные числа можно представить в виде отношения m/n: 1,3333333… = 1/3; 2 = 6/3; 0 = 0/5 и т.д. Можно ли иррациональное свести к рациональному? «Всё есть число» (Пифагор)	 ***Теорема Пифагора:***  Почему гипотенуза всегда больше катета?	***Иррациональные числа*** Как могли пифагорейцы столкнуться с иррациональными числами? Почему пифагорейцы пришли в ужас от иррациональных чисел? Какая единица измерения у иррациональных чисел?
Просчитанная бесконечность Верно ли, что любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби, в которой можно выделить повторяющийся период? (4 = 4,00000000…; ½ = 0,5...; 1/3 = 1,3333333… и т.п.)	***Как связать рациональное и иррациональное*** Как Пифагор в своей теореме (формуле) «избежал» встречи с иррациональными числами? Например, $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Все числа стоят под квадратом. Можно ли в реальных измерениях получить иррациональные числа?	***Непросчитанная бесконечность*** Можно ли обнаружить закономерность в цифрах после запятой? Нет повторяющегося периода: $\sqrt{2} \approx$ 1,4142135… Можно ли в бесконечно меняющихся сочетаниях цифр обнаружить номер своего телефона?
Построение рационального числа единица измерения  Любое ли число можно отложить относительно 1? Доказано, что трансцендентные числа невозможно отложить относительно 1. Почему?	***Проблема несоизмеримости*** Верно ли, что рациональные и иррациональные числа не имеют общую единицу измерения? Почему древние греки отказались от числовой алгебры и обратились к *геометрической алгебре*?	***Построение иррационального числа***  Так как невозможно отложить число π относительно 1, то невозможно решить задачу на квадратуру круга.
Доказательство теоремы Пифагора Существуют десятки доказательств теоремы из различных культур, среди которых можно найти своё, близкое доказательство. *«Смотри!»* 	***Обратная теорема (признак) Пифагора*** С помощью этой теоремы мы узнаём, является ли треугольник прямоугольным. А что будет, если равенство нарушится? С каким треугольником мы будем иметь дело? $à^2 + â^2 > ñ^2$; $à^2 + â^2 < ñ^2$ - ?	***«Пифагоровы штаны»***   $à^2 + à^2 = ñ^2$ «Пифагоровы штаны во все стороны равны». Это равнобедренный треугольник.

Парадоксальная гармония

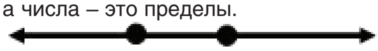
Каждый пытливый и любознательный человек рано или поздно приходит к выводу, что тайну вечной красоты сохраняет гармония рационального и иррационального, соизмеримого и несоизмеримого, предсказуемого и непредсказуемого, упорядоченного и хаотического. Одними из первых с этой тайной столкнулись пифагорейцы. На первых порах лик этой тайны привёл их в ужас, так как в нём явно просматривалось нечто иррациональное и непредсказуемое. Пифагор выстроил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и убедительно доказал, что проблема несоизмеримости разрешается даже в обычном прямоугольном треугольнике: рациональное и иррациональное сосуществуют, образуя закономерную и в то же время парадоксальную гармонию.

Возможные темы для исследования

1. Проблема иррационального в Древней Греции.
2. Рациональное и иррациональное – антагонизм или вынужденное дополнение.
3. Согласование рационального и иррационального в древнегреческой математике.
4. Лучшее из десяти доказательств теоремы Пифагора.

Эвристическая карта познания учащегося 8-го класса
Тема: «Всё есть число»

Главный вопрос-проблема: Какую роль играют числа в современном мире?
«Всё есть число» (Пифагор)

Числовая пластика Числа пифагорейцами мыслились *зримо и осязаемо*, в виде камешков, разложенных на песке или на счётной доске – *абаке (треугольные, квадратные числа и т.д.)*. Кстати, по этой причине они не знали «невидимого» *нуля*.	***Времена пифагорейцев***  Почему пифагорейцы не знали дробных чисел? Единица для них была «числовым атомом» и считалась неделимой, неразложимой. Единица как символ *целого*!?	***Числовая мистика*** Почему пифагорейцы обожествляли числа? Пифагорейцы верили в магию чисел. До сих пор человечество неравнодушно к таким числам, как 1, 3, 7, 13 и т.д. Некоторые люди верят в «своё» число.
Вера пифагорейцев *Что стало поводом для кризиса математики?* Пифагорейцы свято верили, что в основе Мироздания лежат *натуральные числа*, простые числовые соотношения и совершенные геометрические формы. Дробь *а/в* они понимали как отношение целых чисел. Однако открытие иррациональных чисел отчасти пошатнуло их веру. В истории математики в этой связи говорится о «настоящем логическом скандале, о глубоком кризисе греческой математики».	***Числовая гармония*** Пифагорейцы одними из первых заговорили о числе как о числовой гармонии, как о диалектическом синтезе *предела* и *беспредельного*. Беспредельное длится и простирается в бесконечность; предел же останавливает это распространение, кладёт ему границу, очерчивает определённые контуры. Думаю, что беспредельное – это прямая, а числа – это пределы.  Число можно делить до бесконечности!	***Как пифагорейцы столкнулись с иррациональным числом?*** Пифагорейцы свято верили, что Мироздание *рационально*. И вот они встретились с – «неразумным» числом $\sqrt{2}$. Данное число они назвали «алогон», т.е. непроизносимое. 
Трансцендентные числа *В 1873 году Ш. Эрит доказал трансцендентность числа е.* *В 1882 году Линдеман доказал трансцендентность числа и неразрешимость задачи квадратуры круга.*	***Фундаментальные числовые константы*** π*, е, φ, Ф и др.* Какие бы параметры мы ни меняли – эти числа остаются постоянными!	**«Золотые числа»** $\hat{O} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} \approx$ 1,62 $\varphi \approx$ 0,62; $\varphi \cdot$ Ф = 1 **математические константы**

Единство рациональных и иррациональных чисел

Отчасти «примирить» рациональные и иррациональные числа стало возможным, когда ввели понятие «действительные (вещественные) числа».

Почему вначале было Число?

Наш мир есть разрастающийся мир величин – бесконечно больших и бесконечно малых: компьютерные гигабайты и терабайты, миллиарды машин, телевизоров, денежных знаков и т.п. Цифровая власть завладевает человеком, диктует ему определённую линию поведения и образ жизни. Человек, как безликая, среднестатистическая величина, становится абсолютно бессильным перед этими, уже ставшими планетарными, энергиями и силами. Яркий пример – тотальная «заражённость» многих людей гаджетами и цифровыми технологиями. При этом неважно, кем человек является – школьником, рабочим или министром. И многие люди с их индивидуальными, самобытными мирами исчезают в этом океане бесконечно малых и бесконечно больших величин, не видя позитивной альтернативы. Однако виноваты не числа, а отношение к ним самого человека. Существуют слова, но есть и Слово (Замысел). Существуют знания, но есть и Смысл (Понимание). Существуют числа, но есть и Число (Закономерность). С возрастанием роли техники человеку нужно всё больше и больше прилагать усилий, чтобы вырваться из притяжения магических величин в мир подлинной жизни и обрести именно свою судьбу. Но для этого их нужно поставить себе на службу, а не быть их рабом. Если сформулировать кратко, то нужно вновь и вновь задумываться над тем, почему вначале было Слово, Смысл, Число?

Возможные темы для исследования

1. Как древние греки открывали иррациональные числа?
2. Фундаментальные числовые константы в современной науке.
3. Магия чисел или обычный обман?
4. Роль числа в современном мире.

формации. Другими словами, она постоянно впитывает в себя всё новые и новые вопросы и знания, т.е. сохраняет некоторую *интеллектуальную интригу*, а значит, втягивает или притягивает к себе духовную сферу ребёнка. И в результате, эвристическая карта познания является одним из важных показателей достигнутого уровня образования учащегося.

Конечно, для раскрытия *предметного учебного содержания* важны такие научные характеристики, как дефиниции, признаки, свойства, виды, закономерности, параметры, постоянные и т.п. Но для нас важнее даже не то, что можно найти в учебнике или словаре, а то, что побуждает учащегося к самостоятельному исследованию (ценности, смыслы, ассоциации, образы, метафоры, интересные исторические факты, высказывания и т.п.), что можно обнаружить в научно-популярной литературе, энциклопедиях или в Интернете и реальной жизни. Поэтому данную эвристическую карту познания лучше всего создавать в компьютерном варианте, широко используя возможности цифровых технологий (анимация, знаки, символы, рисунки, шрифт и т.п.).

Чтобы эвристическая карта обрела оптимальную полноту, без существенных пробелов, требуется компетентность педагога, который обладает профессиональной *эрудицией* и нужным *кругозором*. И самое главное, он может научить дозировать информацию (знания об опорных сигналах, конспектах) и помочь придать ей эвристический вид. В этой связи важны два понятия – «*целостность*» и «*полнота*». Конечно, очень сложно достичь абсолютной полноты знания, но можно и нужно на данном определённом этапе развития человека сформировать некоторую оптимальную целостность, соответствующую его возрасту, знаниям и интеллектуальным возможностям.

Если появляется несколько, а ещё лучше – набор или комплект эвристических карт, то, безусловно, они требуют и *гармонизации между собой*, чтобы одна плавно переходила или как бы прорастала в другую. В учебном году вполне достаточно создания 3–5 эвристических карт познания. Так, постепенно воссоздаётся органичная для данного человека *математическая картина мира*. Надо сказать, что работа с комплектом эвристических карт доставляет человеку не только интеллектуальную, но и эстетическую и даже этическую радость. Ведь человек опосредованно лепит и свой внутренний мир, своё мировидение, своё мировоззрение. А во внутреннем мире, как известно, не существует перегородок: и интеллектуальное, и эстетическое, и этическое существуют там как единое целое, т.е. сосуществуют.

На наш взгляд, эвристическая карта познания есть *промежуточное звено* между некоторой системой знаний и исследовательской работой, ведь именно в ней происходит проблематизация материала, и выявляются *неисследованные лакуны*. Оптимальная площадь заполнения эвристической карты познания – это лист А4 (размер шрифта и рисунков можно варьировать). Накапливать эвристические карты познания можно в обычном *портфолио*, где, как известно, накапливаются плоды личностного творчества учащегося. Немаловажным достоинством этого варианта сосредоточения информации является *панорамная обозримость*. Собственно, после создания эвристической карты познания логично приниматься за *исследовательскую работу*.

Ниже мы приводим три эвристические карты познания, созданные совместно с одним из учащихся, которые стали основой для его исследовательских работ. Безусловно, эти карты познания пересекаются, т.е. имеют общую информацию и проблематику, которые подаются *в разных контекстах*, и поэтому в разнообразных смысловых аспектах воспринимаются несколько по-иному.

В заключение мы отметим, что креативно-опорные сигналы, эвристические карты познания, иссле-довательские работы учащихся мы интегрируем в крупных концептуальных блоках-модулях, которые уже непосредственно проектируют современную математическую картину мира. Вот некоторые из интригующих названий блоков-модулей: «Всё есть число», «Целое – доля – часть в математике и жизни», «Симметрия в науке, искусстве и жизни», «Пропорция и гармония мира», «Софисты и софистика», «Что есть истина», «Великая тайна пифагорейцев», «Наш многомерный мир», «Угловатая форма, устремлённая ввысь», «Тайны и загадки совершеннейшей формы», «Скалярно-векторное понимание процессов мира», «Парадоксы бесконечности», «Царство правильных многоугольников и многогранников», «Этот вероятностный мир», «Евклидова и неевклидова геометрии», «Фундаментальные математические константы», «Графическое моделирование объектов и процессов мира», «Особенности интегрально-дифференциального понимания мира», «Параметрическая связь и взаимообусловленность объектов мира» и т.д. Обратим внимание, что для нас принципиально важно, что в названиях мы всегда стремимся выйти за рамки «узкой» математики в мир реальной жизни, где происходит вынужденная или органичная интеграция предметов школьного цикла. ❑